



Учебно пособие

Записки на лекции по Техническа механика

Настоящото учебно пособие по Техническа Механика е предназначено за студентите от специалности „Инженерна физика“ и „Ядрена техника и ядрена енергетика“ на Физически Факултет към Софийския Университет „Св. Климент Охридски“ и обхваща материала, преподаван от автора.

Целта на учебното пособие е да запознае студентите с основните закони на механиката на деформируемото твърдо тяло и основните характеристики на важни машинни елементи и механизми, намиращи широко приложение в уредостроенето, фината механика и при поставянето на различни физични експерименти.

Усвояването на методите на техническата механика изработва навици за поставяне на различни физични експерименти и решаване на много технически задачи.

Дисциплината Техническа механика има практично-приложен характер, което се осъществява чрез изработване на различни видове курсови задачи и проекти.

Учебното пособие по Техническа механика е разделено на две части:

1. Въведение в механиката на деформируемото тяло
2. Механизми и машинни елементи.

Част първа включва основни понятия от дисциплините „Съпротивление на материалите“, „Теоретична механика“, „Механика на деформируемото твърдо тяло“.

Част втора изучава основни понятия от механизми и кинематичното им изследване („Теория на машините и механизмите“) и Основни понятия от „Машинни елементи“.

По-подробно изложение на разглежданите теми може да се намери в посочената литература в края на учебното пособие.

Доц.д-р Йонка Иванова,
Катедра „Ядрена техника и ядрена енергетика“,
2019 г.



Част 1

Въведение в механиката на деформируемото тяло

Лекционни записки за студентите от специалности „Инженерна физика“
и „Ядрена техника и ядрена енергетика“
на Физически Факултет, Софийския Университет „Св. Климент Охридски“

Доц.д-р Йонка Иванова,
Катедра „Ядрена техника и ядрена енергетика“
Физически Факултет



СЪДЪРЖАНИЕ

1. Основни понятия и аксиоми на статиката. Конкурентна система сили.
 - 1.1. Основни понятия и определения
 - 1.2. Аксиоми на статиката
 - 1.3. Принцип на освобождаване на връзките. Опорни реакции. Видове опори
 - 1.4. Конкурентна система сили
2. Момент на сила спрямо точка и спрямо ос. Двоица сили.
 - 2.1 Момент на сила спрямо точка
 - 2.2. Момент на сила спрямо ос.
 - 2.3. Двоица сили
3. Редукция на произволна система сили. Условия за равновесие
 - 3.1 Основна теорема на статиката за редукция на система сили
 - 3.2. Условия за равновесие на произволна система сили
4. Център на тежестта
 - 4.1. Обобщена теорема на Вариньон
 - 4.2. Редукция на система успоредни сили
 - 4.3. Център на тежестта на система материални точки
5. Реален обект и изчислителна схема
 - 5.1. Схематизация на свойствата на материала
 - 5.2. Схематизация на формата на конструктивните елементи
 - 5.3. Схематизация на натоварването
 - 5.4. Хипотези
6. Вътрешни усилия в конструктивните елементи
 - 6.1. Метод на сечението. Вътрешни сили.
 - 6.2. Вътрешни усилия в прави греди, натоварени с пространствени системи съсредоточени сили
 - 6.3. Вътрешни усилия в прави греди, натоварени с разпределени товари
 - 6.4. Диференциални зависимости между интензитета на натоварването, тангенциалното усилие и огъващи момент.
 - 6.5. Напрежение
 - 6.6. Преместване и деформация
7. Елементи, подложени на опън, натиск и срязване
 - 7.1. Централен опън и натиск – основни понятия, напрежения, деформации, якостно и деформационно условие при опън и натиск
 - 7.2. Срязване. Напрежения и деформации. Якостно и деформационно условие при срязване
8. Теория на напрегнатото състояние



- 8.1. Видове напрегнати състояния
- 8.2. Едномерно напрегнато състояние
- 8.3. Двумерно напрегнато състояние
- 8.4. Тримерно напрегнато състояние
- 8.5. Зависимост между деформациите и напреженията
- 8.6. Потенциална енергия на деформацията при тримерно напрегнато състояние

9. Геометрични характеристики на равнинни фигури
 - 9.1. Статични моменти. Център на тежестта
 - 9.2. Инерционни моменти
 - 9.3. Инерционни моменти на прости фигури
 - 9.4. Зависимост между инерционните моменти спрямо успоредни оси
 - 9.5. Зависимост между инерционните моменти спрямо завъртяни оси
 - 9.6. Инерционни моменти на сложни фигури
 - 9.7. Инерционни радиуси
 - 9.8. Съпротивителни моменти

10. Специално огъване на прави греди
 - 10.1. Основни понятия и определения
 - 10.2. Нормални напрежения при чисто огъване
 - 10.3. Тангенциални напрежения при специално огъване
 - 10.4. Якостно условия при огъване
 - 10.5. Деформация при специално огъване
 - 10.6. Потенциална енергия на деформацията при специално огъване

11. Усукване
 - 11.1. Основни понятия и определения
 - 11.2. Напрежения и деформации при усукване на вал с кръгово напречно сечение
 - 11.3. Якостно и деформационно условие при усукване
 - 11.4. Потенциална енергия на деформацията при усукване
 - 11.5. Напрегнато състояние при усукване

12. Теории за граничното напрегнато състояние
 - 12.1. Основни понятия и определения
 - 12.2. Първа теория за граничното напрегнато състояние
 - 12.3. Втора теория за граничното напрегнато състояние
 - 12.4. Теория на максималното тангенциално напрежение
 - 12.5. Четвърта теория за граничното напрегнато състояние или енергетична теория
 - 12.6. Обобщена теория на Мор

13. Сложна съпротива
 - 13.1. Наклонено огъване
 - 13.2. Огъване и опън(натиск)
 - 13.3. Огъване и усукване

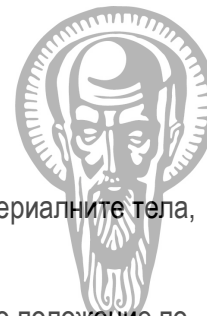


14. Устойчивост на конструктивни елементи
 - 14.1. Основни понятия
 - 14.2. Загуба на устойчивост на натиснати пръти при напрежения под границата на пропорционалност. Формула на Ойлер
 - 14.3. Критична сила при други начини на закрепване
 - 14.4. Загуба на устойчивост на натиснати пръти при напрежения над границата на пропорционалност. Граница на валидност на формулата на Ойлер

15. Съдове под налягане
 - 15.1. Тънкостенни съдове под налягане

16. Якост на материалите при променливи напрежения
 - 16.1. Основни понятия
 - 16.2. Характеристики на цикъла
 - 16.3. Граница на умора. Криви на Вюлер
 - 16.4. Фактори, които влияят върху границата на умора
 - 16.5. Якостни пресмятания при променливи напрежения

17. Основи на теорията на разрушението
 - 17.1. Поведение на материалите при ниски температури
 - 17.2. Крехко разрушаване
 - 17.3. Определяне на разрушаващото напрежение.
 - 17.3.1. Теория на Грифитс. Енергетичен подход.
 - 17.3.2. Теория на Ирвин
 - 17.4. Критична стойност на коефициент на интензивност на напреженията



Механика. Основни понятия

Механиката е наука за общите закони на механичните движения и равновесието на материалните тела, както и за възникващите при това механични взаимодействия.

Под механично движение на даден материален обект се разбира изменение на неговото положение по отношение на други материални обекти. Покоят на материалните обекти е частен случай на механичното движение.

Раздели на механиката

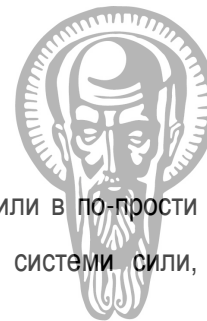
Механиката се подразделя на статика, кинематика и динамика.

- В статиката се разглеждат въпросите на еквивалентност на системи сили, приложени върху материални обекти (замяна на една система сили с друга, която има същото механично въздействие върху телата). Освен това се разглеждат необходимите и достатъчни условия за равновесие на система сили.
- В кинематиката се разглеждат различните видове движения, които извършват материалните тела.
- В динамиката се разглежда взаимовръзката между движенията, извършвани от материалните обекти и пораждащите ги сили.

В зависимост от разглежданите материални обекти, извършващи механично движение, механиката се разделя на механика на материална точка, механика на материална система и механика на абсолютно твърдо тяло.

Хипотеза за непрекъснатост

Приема се, че всяка частица от телата, т.е. произволен обем от телата - твърди, течни или газообразни, се състои от "безброй" много гравитни частици – молекули или атоми.



1. Основни понятия и аксиоми на статиката. Конкурентна система сили.

В статиката се разглеждат свойствата на сили, преобразуване на сложни системи сили в по-прости еквивалентни системи и се установяват условията за равновесие на различни системи сили, проложени върху материалните обекти.

1.1. Основни понятия и аксиоми на статиката.

Основните понятия, които се използват в статиката при формирането на нейните аксиоми и теореми, са материален обект и сила.

Материалният обект е понятие, което е изградено на основа на схематизацията на реалните тела. Той притежава само тези свойства, които имат значение при механичното изследване, напр. маса, непрекъснатост, механична система.

В статиката реалните тела се моделират със следните материални обекти: материална точка, идеално твърдо тяло и механична система.

Материална точка е тяло, размерите на което могат да се пренебрегнат при някои задачи при изучаване на движението му. Тя се отличава от геометричната точка по това, че притежава маса и притежава свойството инертност, както и способността да си взаимодейства с други материални тела.

Материалната точка може да се разглежда и като абстрактен образ на материалните частици, от които е съставено реалното тяло.

Идеално абсолютно твърдо тяло е тяло, при което разстоянията между кои да са две точки от него остава постоянно независимо от силите, приложени към него.

Всяко реално тяло вследствие на взаимодействието си с другите тела се деформира. Големината на деформациите зависи от материала на тялото, размери му и силите приложени към него. Отчитането на тези деформации има значение при пресмятане на якостните качества на машинните детайли и конструкции.

Твърдо деформируемо тяло е тяло, в което разстоянията между кои да са две точки от него е зависимо от силите, приложени към него.

Идеално твърдо тяло е твърдо деформируемо тяло, разглеждано като абсолютно твърдо след деформирането му от приложените сили.

Механична система се нарича съвкупност от материални обекти, в които положението или движението на всеки от тях зависи от положението и движението на всички останали обекти.



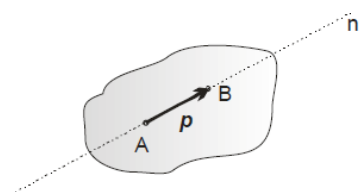
Определящ признак за механична система е наличието на сили на взаимодействие между частите ѝ. Класически пример за механична система е Слънчевата система.

Понятие за сила.

Силата е мярка за механичното взаимодействие между телата. Чрез нея се изразява големината, направлението и посоката на това взаимодействие.

Силата е векторна величина, която се определя с четири елемента: приложна точка, директриса (направление на действие), посока и големина.

Директрисата на силата се определя от приложената ѝ точка А и посоката ѝ на действие.



Фиг. 1.1. Представяне на сила

Според международната система за измерителни единици (SI) за единица сила се приема нютон (1N). Основните величини в механиката и единиците за измерването им съгласно системата SI са за дължина – метър – m; за маса - килограм - kg; за време - секунда - s .

Силата, както и нейната единица за измерване са производни величини. За единица сила се приема силата, която придава на тяло с маса 1 kg ускорение 1 m/s². Нарича се нютон (N).

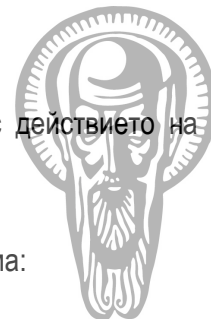
В механиката се използват кратни на нютон единици: килонютон (1 kN = 1000 N) и меганютон (1 MN = 10⁶ N).

В техническата измервателна система килограм-сила (1 kgf) е единица за сила. Връзката между килограм – сила (1 kgf) и нютон е: 1 kgf = 9.80665 N ≈ 9.81 N.

Силите като вектори се означават с главни латински букви, например P, F.

Съвкупност от сили, приложени върху материален обект, се нарича система сили. Според взаимното разложение на линиите на действие на силите се различават пространствени и равнинни системи сили.

Система сили, която действа на даден материален обект, се нарича уравновесена, когато всяка точка от този обект се намира в състояние на покой или на равномерно праволинейно движение.



Две системи сили се наричат еквивалентни, ако когато се замени едната с действието на другата, кинематичното състояние на материалния обект не се променя.

Условието за еквивалентност на две системи сили се изразява в следната форма:

$\{\vec{P}_1, \vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n\} \sim \{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_m\}$, където n и m са броят на силите в системите.

Да се редуцира една система сили означава да се замени нейното действие с действието на по-проста еквивалентна система. Ако една система сили може да се замени с една сила с еквивалентно действие, тази сила се нарича равнодействаща (\vec{R}):

$$\vec{R} \sim \{\vec{P}_1, \vec{P}_1, \dots, \vec{P}_n\}.$$

1.2. Аксиоми на статиката

Аксиоми на статиката

В основа на статиката са заложи изходни положения, които се приемат без доказателство и се наричат аксиоми на статиката. Аксиомите на статиката са резултат от обобщения на многобройни опити и наблюдения над равновесието на материалните обекти, потвърдени от практиката. Някои от основните закони на механиката, формулирани от Галилей и Нютон, са едновременно и аксиоми на статиката.

Аксиома 1. Под действие на уравновесена система сили материалната точка се намира в състояние на покой или равномерно праволинейно движение. Тази аксиома изразява установения от Галилей (1638 г) принцип на инерцията.

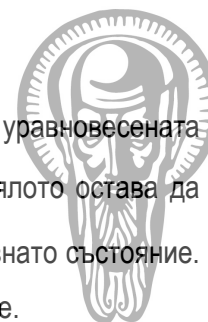
Аксиома 2. Две сили, приложени върху твърдо тяло, се уравновесяват тогава и само тогава, когато имат равни големини, обща директриса и противоположни посоки (фиг.1.2а).

Аксиома 3. Кинематичното състояние на материален обект не се променя, ако към действащите му сили се прибави или извади уравновесена система сили. Следователно две системи сили, които се различават помежду си с една уравновесена система, са еквивалентни.

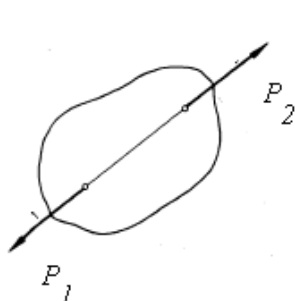
Следствие

Кинематичното състояние на твърдо тяло не се променя, ако се плъзнат силите, които му действат, по техните директриси (фиг.1.2б).

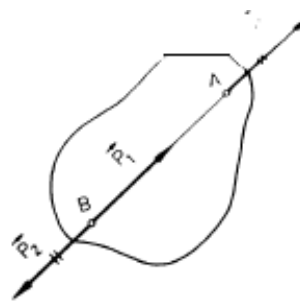
Нека на дадено тяло в точка А действа сила P . В произволна точка В от директрисата на силата се прилага уравновесена система сили. $\{\vec{P}_1, \vec{P}_2\}$; $|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = |P|$. Според третата аксиома



кинематичното състояние на тялото не се променя. Ако след това се премахне уравнивсената система сили $\{\vec{P}, \vec{P}_2\}$, кинематичното състояние на тялото не се променя. Върху тялото остава да действа само силата \vec{P}_1 , която отговаря на първоначално действащата сила \vec{P} в плъзнато състояние. Вектори, които могат да се пренасят по линията им на действие, се наричат плъзгащи се.



Фиг. 1.2 а.



Фиг.1.2.б

Аксиома 4

Равнодействащата на две сили с обща приложна точка е равна по големина и направление на диагонала на паралелограма, образуван от силите.

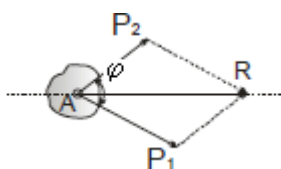
Система от две сили с обща приложна точка има равнодействаща и тя е равна на геометричната сума на две сили:

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \quad (1.1)$$

Големината на равнодействащата съгласно косинусовата теорема е:

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + 2P_1 P_2 \cos(\vec{P}_1, \vec{P}_2)} \quad (1.2)$$

Следствие 1. Ако върху една материална точка действат едновременно две сили \vec{P}_1 и \vec{P}_2 , състоянието на точката няма да се измени, ако върху нея вместо силите и се приложи равнодействащата \vec{R} получена по правилото на паралелограма.



фиг.1.3.

Замяната на една система сили с друга по-проста система се нарича **редукция**.

Аксиома 5



При взаимодействие на материални обекти на всяко действие отговаря равно и противоположно насочено противодействие.

Следователно, ако тялото А действа върху тялото В със сила \vec{P}_1 , а тялото В действа на А със сила \vec{P}_2 , тези сили са равни по големина, имат обща директриса и противоположни посоки, т.е. $\vec{P}_1 = -\vec{P}_2$.

Двете сили са приложени към различни тела и затова не могат да се уравнишат.

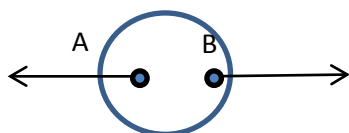


Фиг.1.4

Обикновено едната от силите се нарича действие, а другата – противодействие. Затова понякога аксиомата се изразява по следния начин: на всяко действие отговаря равно по големина противодействие.

Следствие 1. две сили, приложени върху абсолютно твърдо тяло или материална точка са в равновесие тогава и само тогава, когато имат обща директриса, еднакви големина и противоположни посоки. Такава двойка сили се наричат противоположни или статична нула. В този случай двете сили са еквивалентни на нула и системата е в равновесие.

Следствие 2. Ако към дадена система сили, приложени към абсолютно твърдо тяло, се прибави или извади уравниваща се система сили, действието на дадената система сили не се изменя.



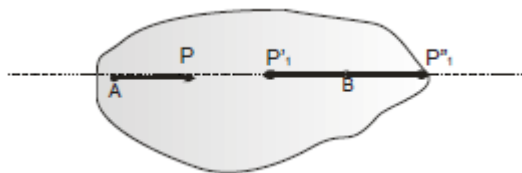
Фиг.1.5

Следствие 3. Действието на една сила върху абсолютно твърдо тяло не се изменя, ако се плъзне тази сила до произволна точка от директрисата ѝ. Доказателството на това следствие може да се получи, изхождайки от фиг.1. 6.

Зададена е сила P с приложна точка А. В друга точка от директрисата на силата може да се прибави уравниваща се двойка сили P'_1 и P''_1 , при което се избира големината на силите да е еднаква с големината на зададената сила P . Силите P и P'_1 образуват статична нула, която може да се



отстрани от тялото, без това да промени кинематичното му състояние. Остава само силата P'' , която е равна на изходната сили, но плъзната до нова приложна точка В.



Фиг.1.6

Аксиома 6. Ако едно деформируемо тяло се намира под действие на дадена система сили, равновесието няма да се наруши, ако то стане идеално твърдо тяло.

Тази аксиома дава основание да се твърди, че условията за равновесие на силите, приложени към идеално твърдо тяло, трябва да са изпълнени, ако силите са приложени към деформируемо твърдо тяло.

1.3 Принцип на освобождаване на връзките. Несвободно твърдо тяло. Опорни реакции. Видове опори

Несвободно твърдо тяло се нарича тяло, върху преместванията на което са наложени ограничения чрез други тела.

Телата, които ограничават свободата на движение на дадено твърдо тяло се наричат *връзки (опори)*.

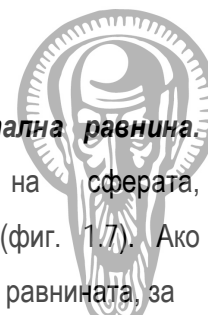
Всяко несвободно тяло, върху което са приложени външни сили, действа с определени сили върху опорите си. Съгласно аксиомата за действието и противодействието опорите противодействат на тялото с право противоположни сили, които се наричат опорни реакции или реакции на връзките. Опорните реакции спадат към категорията на външните сили и са приложени непосредствено върху разглежданото тяло.

За несвободните тела е в сила следната **аксиома**:

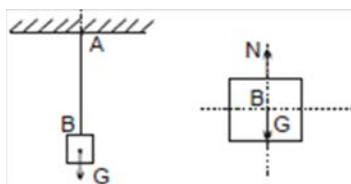
Кинематичното състояние на едно несвободно тяло не се изменя, ако то се освободи от наложените му връзки и се заменят със съответните опорни реакции (принцип на освобождаването).

Чрез принципа на освобождаването всяко несвободно тяло може мислено да се разглежда като свободно.

Някои прости опори



Фиг.1.7



Фиг.1.8

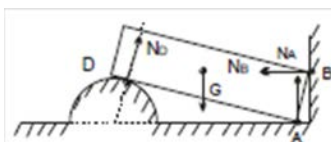
- **Сфера върху неподвижна хоризонтална равнина**

Равнината ограничава движението на сферата, следователно тя е опора на сферата (фиг. 1.7). Ако мислено се освободи сферата от връзката с равнината, за да остане тя в покой, е необходимо в допирната точка **A** да се приложи силата **N**, право противоположна на теглото на сферата **G**. Силата **N** е реакцията на равнината върху тялото, а сферата може да се смята за свободно тяло под действие на двете сили **G** и **N**.

- **Тяло, окачено на нишка.** Реакцията на нишката е насочена по оста **y** (фиг. 1.8). Нишката е окачена в точка **A**, а в края **y** е закрепено тяло с тегло (товар) **G**. теглото на приложеното тяло представлява силата на опъване на нишката, а силата на противодействие на нишката върху товара е силата **N**.

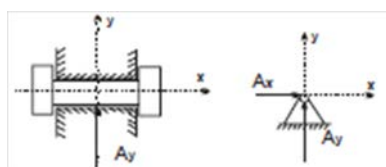
в края **y** е закрепено тяло с тегло (товар) **G**. теглото на приложеното тяло представлява силата на опъване на нишката, а силата на противодействие на нишката върху товара е силата **N**.

Греда, опряна върху гладки повърхнини.



Фиг.1.9

Типична схема на гредата опряна върху гладки повърхнини е показана на фиг. 1.9. Гредата има тегло **G** (действието), приложена в центъра на тежестта на гредата и се опира в точка **D** върху гладка повърхнина и в точки **A** и **B** върху хоризонтална и вертикална овърхнина.



Фиг.1.10

Реакциите в местата допира на гредата имат направления и посоки, показани на схемата.

- **Неподвижна цилиндрична става.** Неподвижната цилиндрична става пречатства произволното постъпателно движение на тялото, но позволява

завъртане около оста на цилиндричното тяло на ставата.



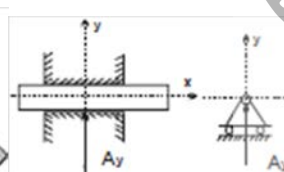
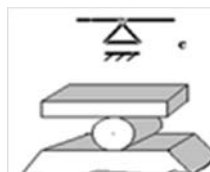
Фиг.1.11

Реакцията **A** на неподвижната цилиндрична опора минава през оста на ставата. Големината и направлението на реакцията са неизвестни предварително. Те се определят в зависимост от натоварването на тялото (действащите върху него сили).

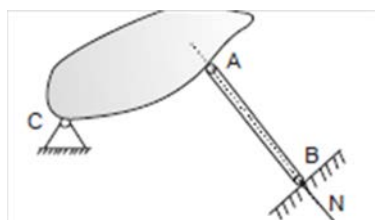


Подвижна цилиндрична става.

Директрисата на реакцията минава през центъра на ставата (фиг.1.12) и е перпендикулярна на опорната равнина. В този случай неизвестна е само големината на реакцията.



Фиг.1.12



Фиг.1.13

- **Прътова опора.** Връзката в този случай се осъществява с помощта на безтегловен твърд прът, свързан с тялото. Върху пръта не действат външни сили. Смята се, че той има задача само да създава опора за тялото. Реакцията на пръта върху тялото е приложена по оста на пръта (фиг.1.13)

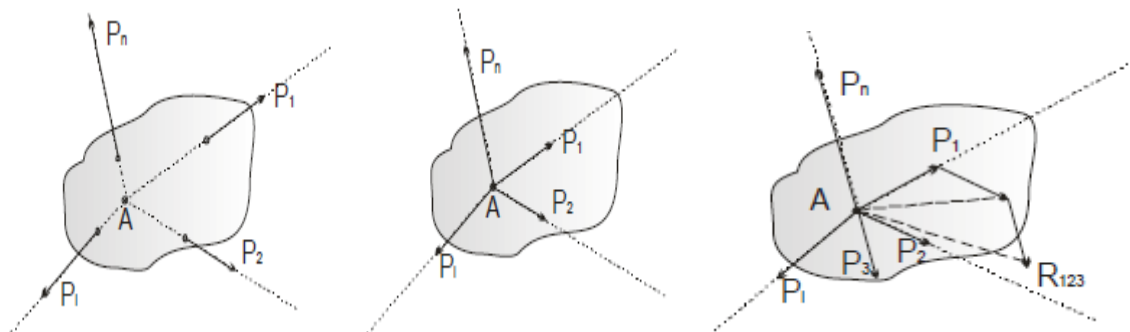
1.4 Конкурентна система сили

1.4.1. Определяне на равнодействащата на конкурентна система сили

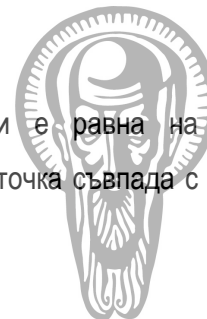
Система сили, чиито директриси се пресичат в една точка, се нарича конкурентна (сходяща).

Може да бъде равнинна и пространствена.

Съгласно 4 аксиома силите могат да се плъзгат по техните директриси. Такава система е еквивалентна на системата сили, приложени в една точка A.



Фиг. 1.14



$$\begin{aligned} \vec{P}_1 + \vec{P}_2 &= \vec{R} \\ \vec{P}_{12} + \vec{P}_3 &= \vec{R}_{123} \\ \vec{R} &= \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \sum_{k=1}^n \vec{P}_k \end{aligned} \quad (1.3)$$

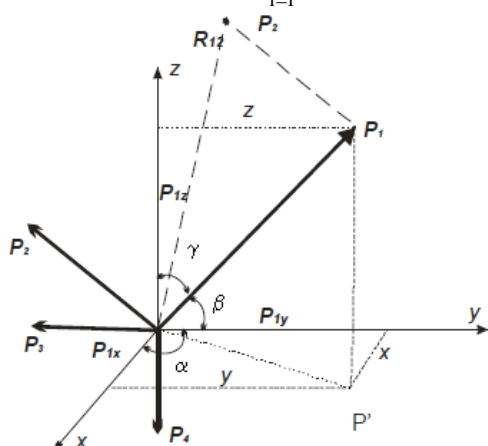
Равнодействащата на конкурентна система сили е равна на векторната сума на отделните сили. Приложната и точка съвпада с точката на пресичане на директрисите на силите.

1.4.2. Аналитична редукция и аналитични условия за равновесие на конкурентна система сили

При аналитичната редукция на система сили се въвежда координатна система, в която силите от системата се представят като вектори в координатната система.

Ако се приеме, че силите от конкурентната система сили са плъзнати до пресечната точка на директрисите им и координатната система е зададена с начало в тази пресечна точка, то за всяка от силите от системата могат да се определят проекциите върху осите на координатната система. В този случай векторното равенство за редукция на силите може да се проектира върху осите на координатната система: x, y, z :

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n = \sum_{i=1}^n \vec{P}_k \quad (1.4)$$



Фиг.1.15.

$$\begin{aligned} R_x &= P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \sum_{i=0}^n P_{kx} \\ R_y &= P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \sum_{i=0}^n P_{ky} \\ R_z &= P_{1z} + P_{2z} + \dots + P_{nz} = \sum_{i=0}^n P_{kz} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$P_{kx} = P_i \cos(\alpha)$ $P_{ky} = P_i \cos(\beta)$ $P_{kz} = P_i \cos(\gamma)$ са проекции на съставляващите системата сили върху координатните оси

R_x R_y R_z - проекции на равнодействащата сила

Големината на равнодействаща е:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\sum P_{kx})^2 + (\sum P_{ky})^2 + (\sum P_{kz})^2} \quad (1.6)$$

Направлението и посоката се определят от направляващите косинуси на вектора R



$$\cos(\alpha) = \frac{R_x}{R} \quad \cos(\beta) = \frac{R_y}{R} \quad \cos(\gamma) = \frac{R_z}{R} \quad (1.7)$$

Аналитични условия за равновесие на конкурентна система сили

За да бъде една конкурентна система сили в равновесие, равнодействащата сила и компонентите и по осите x, y, z , трябва да са 0.

$$\sum_{i=0}^n \vec{P}_{kx} = 0 \quad \sum_{i=0}^n \vec{P}_{ky} = 0 \quad \sum_{i=0}^n \vec{P}_{kz} = 0 \quad (1.8)$$

Частни случаи

Равнинна координатна система

Координатната система е двумерна Oxy , а проекциите на силите са върху оси Ox и Oy

$$\vec{R}_x = \vec{P}_{1x} + \vec{P}_{2x} + \dots + \vec{P}_{nx} = \sum_{i=0}^n \vec{P}_{kx} \quad (1.9)$$

$$\vec{R}_y = \vec{P}_{1y} + \vec{P}_{2y} + \dots + \vec{P}_{ny} = \sum_{i=0}^n \vec{P}_{ky}$$

Големината на равнодействащата се определя от израза:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(\sum P_{kx})^2 + (\sum P_{ky})^2} \quad (1.10)$$

Направлението и посоката – от направляващите косинуси на вектора R

Аналитичното условие за равновесие е :

$$\sum_{i=0}^n \vec{P}_{kx} = 0 \quad ; \quad \sum_{i=0}^n \vec{P}_{ky} = 0 \quad (1.11)$$



2. Момент на сила спрямо точка и спрямо ос. Двоица сили.

2.1. Момент на сила спрямо точка

Моментът характеризира въртеливото действие на силите, приложен към дадено тяло, което има възможност да се върти около неподвижна точка или ос.

По дефиниция момент на силата P спрямо точката O се нарича вектора M_O , определен с четири елемента:

- приложна точка – точката O ,
- директриса – перпендикулярна на равнината, определена от силата P и точка O ,
- посока, определена по правилото на дясната ръка; Ако с дясната ръка се обхване директрисата на момента така, че върховете на пръстите да показват посоката на силата, палецът определя посоката на момента.
- големина – равна на произведението от големината на силата и рамото h (разстоянието от точка O до директрисата на силата):

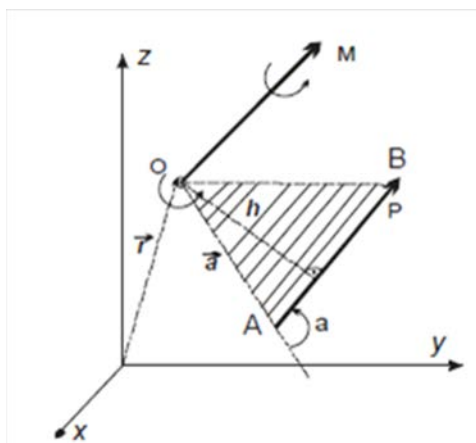
Моментът на сила спрямо точка O е вектор, равен на векторното произведение на радиус-вектора на приложената точка на силата A и вектора сила \vec{P}

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{r} \times \vec{P}. \quad (2.1)$$

Големината на момента е:

$$M_O(\vec{P}) = |\vec{r} \times \vec{P}| = rP \sin(\vec{r}, \vec{P}) = Ph \quad (2.2)$$

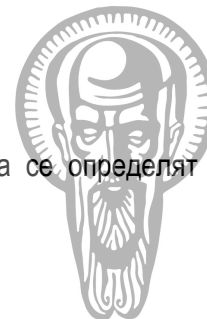
$h = r \sin(\vec{r}, \vec{P})$ е рамо на силата \vec{P} , т.е. най-късото разстояние от центъра O до линията на действие на силата.



Фиг.2.1

От дефиницията следват непосредствено няколко свойства:

- моментът на сила спрямо точка е свързан вектор, приложен в точка O , наричана момент център;
- При записване на вектора на момента винаги се индексира с буквата на моментовия център;
- големината на момента може да се изрази и чрез удвоеното лице F на тъй наречения момент триъгълник OAB ;
- моментът на силата спрямо точка не се променя, ако силата се плъзне по директрисата си;
- моментът на сила спрямо точка е нула, когато големината на силата е нула или рамото на силата е равно на нула (когато директрисата на силата минава през моментовия център);
- ако се промени посоката на силата, моментът също променя посоката си;



Главен момент на система сили спрямо точка.

Ако е зададена произволна пространствена система сили $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n$ могат да се определят моментите на всички сили спрямо произволна точка O :

$$\vec{M}_{O1} = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1, \quad \vec{M}_{O2} = \vec{r}_2 \times \vec{P}_2, \quad \vec{M}_{On} = \vec{r}_n \times \vec{P}_n \quad (2.3)$$

където \vec{r} са радиус-векторите на приложените точки на силите спрямо точка O .

Моментите $\vec{M}_{O1}, \vec{M}_{O2}, \vec{M}_{On}$ са приложени в точка O и образуват пространствена конкурентна система от моменти, които могат да бъдат сумирани геометрично.

Векторът \vec{M}_O , равен на геометричната сума от моментите на всички сили спрямо точка O , се нарича **главен момент** на дадената система сили спрямо точка O :

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i \quad (2.4)$$

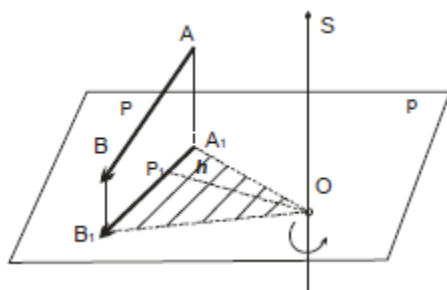
2.2. Момент на сила спрямо ос

Освен момент на сила спрямо точка в механиката широко се използва и понятието момент на сила спрямо ос.

За да се определи моментът на силата \vec{P} спрямо дадена ос S , се построява равнина π , перпендикулярна на оста и се проектира силата в тази равнина. В този случай може да се изчисли моментът на проекцията на силата спрямо прободната точка на оста S с равнината π – точка O .

По дефиниция момент на сила спрямо ос е взетото със знак плюс или минус произведение на големината на проекцията на силата \vec{P} върху равнина, перпендикулярна на оста, по рамото h , относно прободната точка O на оста и равнината.

$$M_s = \pm P_1 \cdot h$$



Фиг.2.2.

Моментът на сила спрямо ос се счита за положителен, ако гледайки срещу оста S , се вижда, че силата се стреми да завърти равнината π в посока обратна на часовниковата стрелка; в противен случай е отрицателен.



От дефиницията следват няколко свойства:

- моментът на сила спрямо ос е скаларна величина (не се дефинира директриса, посока и приложна точка, а само стойност и знак);
- моментът на сила спрямо ос не се променя, ако силата се плъзне по нейната директриса;
- моментът на сила спрямо ос е нула, когато силата и оста лежат в една равнина, т.е силата или е успоредна или пресича оста. В този случай или проекцията или рамото има стойност нула.
- ако се смени посоката на силата P се сменя и знака на момента на силата M_S спрямо оста S ;
- дименсията на момента на сила е $N.m$ (нютон по метър).

Главен момент на система сили спрямо ос.

Ако е зададена произволна пространствена система сили $\vec{P}_1 \vec{P}_2 \vec{P}_3 \dots \vec{P}_n$, приложени към едно твърдо тяло, могат да се определят моментите на всички сили спрямо произволна ос S .

Главен момент на системата сили спрямо оста S се нарича алгебричната сума от моментите на всички сили спрямо тази ос:

$$\vec{M}_S = \sum_{i=1}^n M_{Si} \quad (2.5)$$

2.3. Двоица сили

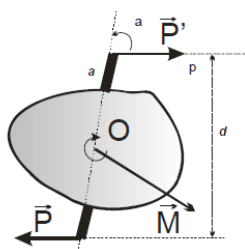
Двоица сили се нарича система от две успоредни сили с еднаква големина и противоположни посоки. Системата от две сили представлява двоица, ако двете сили са успоредни и са с противоположни знаци. $\vec{P} = -\vec{P}'$ Двоицата, приложена върху твърдо тяло, се стреми да го завърти.

Въртящият ефект на двоицата се характеризира с **момент** на двоицата.

Разстоянието d между двете сили се нарича рамо на двоицата;

Равнината π в която лежат силите, се нарича равнина на двоицата.

Съвкупност от определен брой двоици, приложени към твърдо тяло се нарича система двоици.



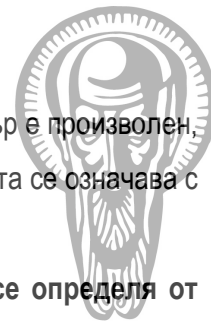
Фиг.2.3.

Свойства на двоицата:

- Главният вектор на двоица сили $\vec{R} = \vec{P} + \vec{P}'$ (геометричната сума на силите е нула: $\vec{R} = \vec{P} + \vec{P}' = 0$)

- Главният момент на двоицата е един и същ за всички точки от пространството, в което действа двоицата.

Това лесно може да се докаже, ако се направят изчисления за момента на двоицата спрямо различни точки. Това дава основание моментът на двоицата да не се индексира с точка спрямо която се



изчисляват моментите и да се смята за свободен вектор. Изборът на моментовия център е произволен, но често той се задава върху директрисата на една от двете сили. Моментът на двоицата се означава с M .

- Векторът M е перпендикулярен на равнината на двоицата π . Големината му се определя от произведението на големината P на силите и рамото на двоицата:

$$M = P \cdot a \cdot \sin \alpha = P \cdot d \quad (2.6)$$

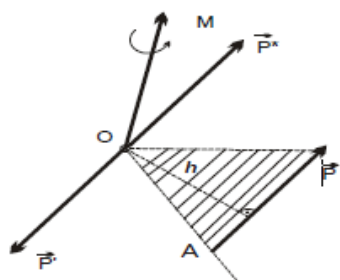
където d е разстоянието между приложните точки на двете сили, а α – ъгълът, който сключва линията, свързваща приложните точки на силите и направлението на двоицата сили.

- Моментът M е насочен към страната, откъдето въртенето на двоицата се вижда в посока обратна на часовниковата стрелка.



3. Редукция на произволна система сили. Условия за равновесие

3.1 Основна теорема на статиката за редукция на произволна система сили



Фиг.3.1

За редуциране на произволна система сили се прилага метод на Поансо, изказан в лема:

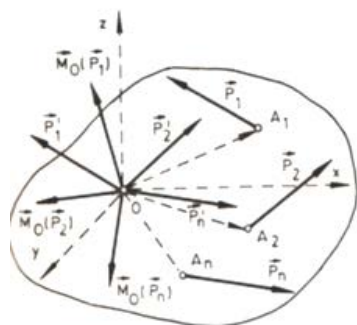
Сила, приложена в дадена точка А на идеално твърдо тяло, е еквивалентна на същата сила, пренесена успоредно на себе си в друга точка О и двоица сили, чийто момент е равен на момента на силата спрямо точката О.

Редукция на произволна система сили

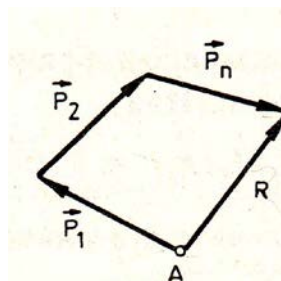
Предполага се, че върху твърдо тяло е приложена произволна пространствена система сили $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_n)$. Всички сили от системата могат да бъдат пренесени до една произволна точка O , която е прието да се нарича *редукционен център*. Върху тялото вместо силите $(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots)$, приложени в различни точки ще действат силите $(\vec{P}'_1, \vec{P}'_2, \vec{P}'_3, \dots, \vec{P}'_n)$, приложени в т.О и една конкурентна система от вектори на моментите на силите $(\vec{M}_O(\vec{P}_1), \vec{M}_O(\vec{P}_2), \dots, \vec{M}_O(\vec{P}_n))$

Конкурентната система сили (силите през редуционния център O) е еквивалентна на една сила R , приложена в т.О и равна на:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad (3.1)$$



а



б

Фиг.3.2.



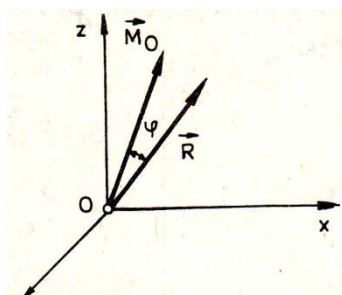
Векторът R се нарича **главен вектор** на произволната пространствена системата сили $(P_1, P_2, P_3, \dots, P_n)$.

Аналитично той се представя чрез трите си проекции върху осите на декартова координатна система. R и равнодействащата на система сили не са еквивалентни.

Векторът \vec{M}_O е геометрична сума на моментите на приложените сили към тялото спрямо т.О и се нарича главен момент на системата сили.

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{M}_O(P_i) = \sum_{i=1}^n (\vec{OA} \times \vec{P}_i) \quad (3.2)$$

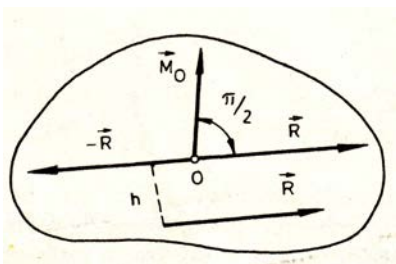
Фиг.3.3



Теорема

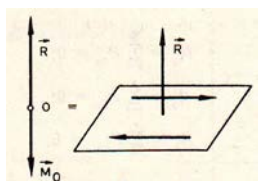
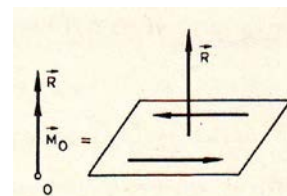
Произволна система сили, действащи върху твърдо тяло е еквивалентна на главния вектор на системата, приложен в произволна точка О, и на момент, равен на главния момент на системата сили спрямо редуционния център О. Съвкупността от главния вектор \vec{R} и главния момент \vec{M}_O се нарича *динама на системата сили*. В общия случай те сключват ъгъл φ помежду си ($\varphi = 90^\circ$). Главният момент \vec{M}_O може да се

замени с двоица сили и рамо $h = M_O/R$. В т.О силите се уравниават. Остава равнодействащата R , която се намира на разстояние h от т.О. Всички сили лежат в една равнина.

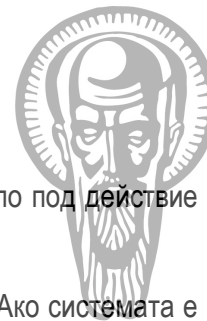


Ако \vec{R} и \vec{M}_O имат обща директриса, системата сили се редуцира до главен вектор и двоица сили, действаща в равнина, перпендикулярна на \vec{R} (силово витло).

Ако \vec{R} и \vec{M}_O имат еднакви посоки силовото витло е дясно.



Ако \vec{R} и \vec{M}_O имат противоположни, силовото витло е ляво.



3.2. Условия за равновесие на произволна система сили

Основна задача на статиката е определяне на условията за равновесие на твърдо тяло под действие на произволна система сили.

Съгласно теоремата всяка произволна система сили може да се редуцира до динама. Ако системата е в равновесие, в равновесие ще бъде и еквивалентната и система, която се състои от главен вектор и главен момент. Необходимо и достатъчно е да са изпълнени 2 векторни условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \sum_{i=0}^n \vec{P}_i = 0 \\ \vec{M}_O = \sum_{i=0}^n \vec{M}_O(\vec{P}_i) = 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

В геометрична форма: многоъгълниците на силите на системата и на моментите им спрямо точка трябва да са затворени.

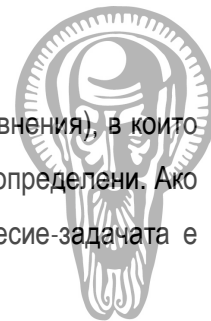
При равновесие векторите са равни на нула, следователно и техните проекции върху осите на декартова координатна система са нула.

Скаларните условия за равновесие са:

$$\begin{array}{ll} R_x = \sum_{i=1}^n R_{ix} = 0 & M_{Ox} = \sum_{i=1}^n M_x(\vec{P}_i) = 0 \\ R_y = \sum_{i=1}^n R_{iy} = 0 & M_{Oy} = \sum_{i=1}^n M_y(\vec{P}_i) = 0 \\ R_z = \sum_{i=1}^n R_{iz} = 0 & M_{Oz} = \sum_{i=1}^n M_z(\vec{P}_i) = 0 \end{array} \quad (3.4)$$

Ако едно тяло се намира в покой при наложени върху него връзки (опори), т.е. е закрепено неподвижно, за него може да се приложи *принципа на освобождаването*. Съгласно този принцип, ако мислено се премахнат връзките и на тяхно място се приложат силите, които те упражняват (опорните реакции), състоянието (равновесието) на тялото не се променя.

Необходимо и достатъчно условие за равновесие на едно идеално твърдо тяло е главният вектор и главният момент на приложената върху тялото система сили (външно натоварване и опорни реакции) за произволна точка да бъдат равни на нула. *За тяло, натоварено с равнинна система сили, горното условие се свежда до три аналитични условия за равновесие (3.4).*



Аналитични условия за равновесие в случая са три равенства (алгебрични уравнения), в които опорните реакции участват като непознати сили (или моменти), които трябва да бъдат определени. Ако броят на неизвестните сили (реакции) е по-малък от броя на условията за равновесие-задачата е статично определима.

Ако броят на неизвестните е по-голям от броя на условията за равновесие (от броя на уравненията), задачата е *статично неопределима* и за нейното решаване се ползват допълнителни зависимости.

План за работа за определяне на опорни реакции на тяло, натоварено с равнинна система сили

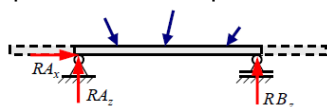
- Гредата се изобразява схематично.
- Означават се приложените върху нея външни сили и моменти (акции).
- Избира се подходяща координатна система.
- Силите в общо положение се представят схематично с техните компоненти (проекции върху координатните оси).
- Разпределените товари се заменят с техните равнодействащи.
- Мислено се премахват опорите (гредата се освобождава от външните връзки), които се заменят със съответните опорни реакции.
- Проверява се дали задачата е статически определима (три неизвестни опорни реакции, които се определят с три уравнения на статиката).
- Избира се най-подходящата за конкретния случай група условия за равновесие (система от 3 уравнения).
- Съставят се и се решават уравненията спрямо неизвестните реакции.
- Ако се получат положителни стойности, това означава, че предварително избраните посоки на опорните реакции са правилни, в противен случай те са обратни.
- Прави се проверка на получените резултати посредством друго уравнение на статиката (силowo или моментowo).



Примерен алгоритъм за решаване на задачи за определяне на опорни реакции

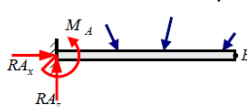
- Опорите се означават като A и B , а опорните реакции в тях – като R_{Ax} и/или R_{Az} ; R_{Bx} и/или R_{Bz}
- Пресмятат се опорните реакции и се прави проверка:

Греда на две опори:



$$\begin{aligned} \sum M_{Ai} &= 0; R_{Bz} = \dots; \\ \sum M_{Bi} &= 0; R_{Az} = \dots; \\ \sum X_i &= 0; R_{Ax} = \dots; \\ \text{Проверка: } \sum Z_i &= 0; 0 = 0; \end{aligned}$$

Запъната греда:



$$\begin{aligned} \sum M_{Ai} &= 0; M_A = \dots; \\ \sum Z_i &= 0; R_{Az} = \dots; \\ \sum X_i &= 0; R_{Ax} = \dots; \\ \text{Проверка: } \sum M_{Bi} &= 0; 0 = 0; \end{aligned}$$

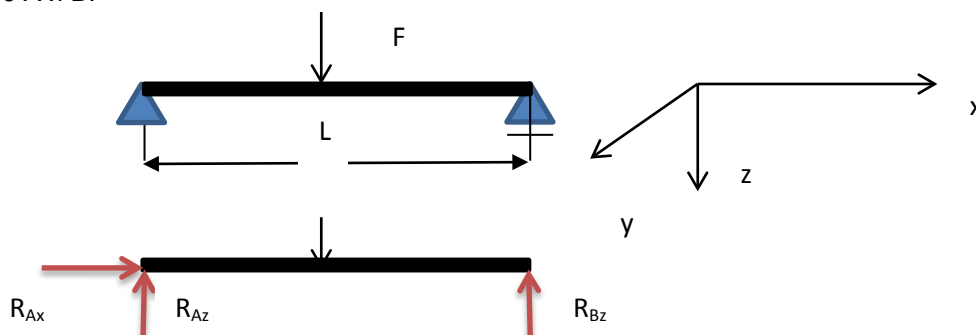
Задача 1. Мост AB ($AB=L$) е закрепен по показания начин. Върху него се намира **товарен автомобил** с тегло F .

Да се намерят реакциите в опорите A и B в следните случаи:

1. Ако не се отчита теглото на моста и камионът действа със сила F , приложена на разстояние $l/2$ от опорите A и B .
2. Ако се отчита теглото на моста като правоъгълно разпределен товар по дължината на моста AB с интензивност на натоварването q

Решение

1. Ако не се отчита теглото на моста и камионът действа със сила P , приложена на разстояние $l/2$ от опорите A и B .



Разглеждаме равновесието на силите, приложени към гредата AB . Въвеждаме координатна система x -по дължината на гредата, z - перпендикулярна

$$\sum Fx_i = 0;$$

$$\sum Fz_i = 0; -R_{Az} + F - R_{Bz} = 0 - 2 \text{ неизвестни}$$

$$\sum M_A(F_i) = 0; -F \cdot \frac{L}{2} + R_{Bz} \cdot L = 0; R_{Bz} = \frac{F}{2}$$

$$\sum M_B(F_i) = 0; -R_{Az} \cdot L + F \cdot L/2 = 0; R_{Az} = \frac{F}{2}$$



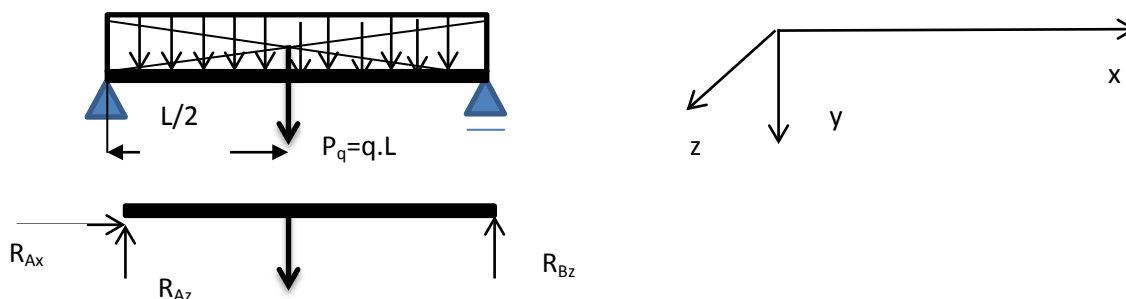
$$\text{Проверка: } \sum F_{z_i} = 0; -R_{Az} + F - R_{Bz} = 0; -\frac{F}{2} - \frac{F}{2} + F = 0$$

$$R_{Az} = \frac{F}{2}; R_{Bz} = \frac{F}{2}$$

2. При отчитане теглото на моста и без друг товар

Равномерно разпределеното натоварване може да се замени със съсредоточена сила \vec{P}_q - равнодействаща на системата равни успоредни сили, приложена в средата на натоварения участък (в центъра на тежестта на товара). Равнодействащата на товара (P_q) е

$$P_q = q \cdot L$$



Заменяме опорите с опорните реакции.

Ставно неподвижна опора забранява движенията в хоризонтално и вертикално направление.

Заменяме ставата с опорните реакции, сили по x (R_{Ax}) и z (R_{Az}). Приложна точка на равнодействащата (P_q) на линейно разпределения товар е центъра на тежестта © на товара:

$$P_q = q \cdot L$$

$$\sum F_{x_i} = 0;$$

$$\sum F_{z_i} = 0; -R_{Az} + P_q - R_{Bz} = 0 - 2 \text{ неизвестни}$$

$$\sum M_A(F_i) = 0; -P_q \cdot \frac{L}{2} + R_{Bz} \cdot L = 0; R_{Bz} = \frac{P_q}{2} = \frac{q \cdot L}{2}$$

$$\sum M_B(F_i) = 0; -R_{Az} \cdot L + P_q \cdot \frac{L}{2} = 0; R_{Az} = \frac{P_q}{2} = \frac{q \cdot L}{2}$$

Проверка

$$\sum F_{z_i} = 0; -R_{Az} + P_q - R_{Bz} = 0; -\frac{qL}{2} - \frac{qL}{2} + qL = 0$$

$$\boxed{R_{Az} = \frac{q \cdot L}{2}; R_{Bz} = \frac{q \cdot L}{2}}$$



Задача 2: Горизонтална греда АВ с дължина L е окачена на стена. В т.В е окачен товар F.

1. Да се определят реакциите в запънатата опора



Решение:

Гредата АВ е набита в стената. В точка А са забранени хоризонтални и вертикални движения, а на гредата – завъртане около оста у.

Въвеждаме координатна система: x-по дължината на гредата, z - перпендикулярна

Разглеждаме равновесието на силите, приложени към гредата АВ.

На схемата е показана опорните реакции на запънатата греда \vec{R}_{Ax} , \vec{R}_{Az} и момента M_A . Приемаме посоката на вертикалната реакция на опората нагоре, а реактивната двоица - в посока, противоположна на въртенето на часовата стрелка. Истинските направления на опорните реакции се определят по знака на отговора.

Съставяме две уравнения за равновесие на равнинни успоредни сили.



1. Сума от силите, действащи по оста x е нула $\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$

$$\sum_{i=1}^n F_{xi} = 0$$
$$R_{Ax} = 0$$

2. Сума от силите, действащи по оста z е нула $\sum_{i=1}^n F_{zi} = 0$

$$-R_{Az} + F = 0; R_{Az} = F$$

3. Сума от моментите на всички сили спрямо т.А да е равна на 0. Приемаме за положителен момента, който има посока, противоположна на въртенето на часовата стрелка

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$$

$$M_A - F \cdot L = 0; M_A = F \cdot L$$

Проверка:

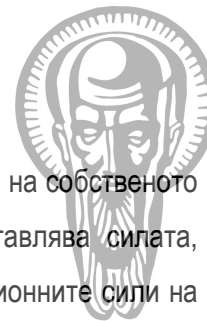
Проверката се прави по условието за равновесие:

$$\sum_{i=1}^n M_{iB} = 0$$

$$-R_{Az} \cdot L + M_A = 0; 0 = 0$$

Следователно опорните реакции са: $R_{Ax} = 0$; $R_{Az} = F$; $M_A = F \cdot L$.

Посоките на тези реакции съвпадат с предварително избраните посоки.



4. Център на тежестта

Върху всяко материално тяло, намиращо се в гравитационно поле, действа силата на собственото му тегло. Ако тялото е съставено от много материални точки, теглото му представлява силата, получена като сбор от теглата на отделните му съставни материални точки. Гравитационните сили на точките, от които е съставено, представлява система от еднопосочни успоредни сили. Равнодействащата на системата успоредни сили е приложена в центъра на тежестта на материалния обект.

В техническата механика е прието гравитационното поле да е хомогенно и теглото се изразява с връзката: $G=m \cdot g$

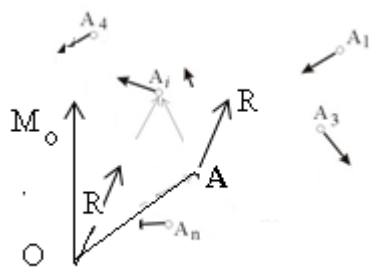
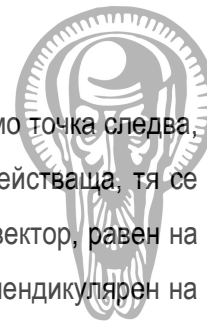
Центърът на тежестта (или масовият център) на материалния обект е точка със свойства, които дават възможност много от въпросите на механиката да се разглеждат обобщаващо и в твърде опростен вид. В статиката се използва следното свойство на центъра на тежестта на един материален обект - ако обектът се подпре в тази точка и върху него не действат никакви други сили, той се намира в безразлично равновесие.

4.1.Обобщена теорема на Вариньон

Едно материално тяло се разглежда като съставено от много материални частици и теглото му се разглежда като сума от силите на теглото на тези частици. Силата на теглото на материална частица с маса m , намираща се в земното гравитационно поле, се разглежда като вертикална сила с големина $G=mg$, насочена към центъра на Земята. Силите на теглата на материалните частици, които изграждат тялото, образуват система еднопосочни успоредни сили. Задачата за определяне на центъра на тежестта на материално тяло се свежда до задача за намиране на равнодействащата на система успоредни сили.

Ако дадена система има равнодействаща \vec{R} , главният момент на системата спрямо дадена точка O е равен на момента на равнодействащата спрямо същата точка. Доказателството е следното. Ако равнодействащата на системата сили е приложена в точка A и нейното действие се пренесе в точка O , там се получава главен вектор, равен и успореден на R , и момент M_o , приложен в същата точка, перпендикулярен на \vec{R} :

$$\vec{M}_o = \vec{OA} \times \vec{R} \quad (4.1)$$



Фиг.4.1

От Редукцията на система сили спрямо точка следва, че ако една система сили има равнодействаща, тя се редуцира в т.О на една динама с главен вектор, равен на равнодействащата, и главен момент, перпендикулярен на \vec{R} , определен от израза:

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n (\vec{OA} \times \vec{R}_i) \quad (4.2)$$

Ако системата сили и тяхната равнодействаща са еквивалентни една на друга, трябва да бъдат еквивалентни и получените в точка О динами. Следва равенство на десните страни

$$\vec{OA} \times \vec{R} = \sum_{i=1}^n (\vec{OA} \times \vec{R}_i) \quad (4.3)$$

4.2. Редукция на система успоредни сили

При редукцията на система от успоредни сили се използва теоремата на Вариньон, която гласи, че ако дадена система сили има равнодействаща R , главният момент M на системата спрямо произволна точка O е равен на момента M_R на равнодействащата спрямо същата точка.

Доказателство

Нека предположим, че системата се състои от n на брой успоредни сили P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) и има равнодействаща R , приложена в т.С (фиг.4.2).

Успоредните сили и тяхната равнодействаща могат да се представят във вида

$$\vec{P}_i = P_i \vec{e} \quad \text{и} \quad \vec{R} = R \vec{e}, \quad (4.4)$$

където \vec{e} е единичният вектор на направлението на успоредните сили.

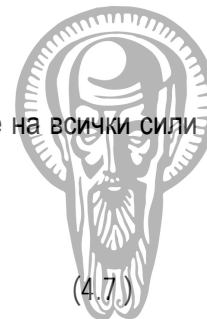
По определение равнодействащата е:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n P_i \vec{e} \quad (4.5)$$

Следва, че големината на равнодействащата е равна на алгебричната сума от големините на успоредните сили.

$$R = \sum_{i=1}^n P_i \quad (4.6)$$

Приложната точка С на равнодействащата се намира като се използва теоремата на Вариньон.



Моментът M на системата спрямо т.О може да се представи като сума от моментите на всички сили по следния начин:

$$\vec{M}_{sys} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i \quad (4.7)$$

Радиус-векторът \vec{r}_i на приложната точка на i -тата сила може да се представи като сума от два вектора, единият от които е радиус-векторът на т.С:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{CA}_i \quad (4.8)$$

Като заместим изразът от (2) в уравнение (1), получаваме

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_C + \vec{CA}_i) \times \vec{P}_i = \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^n \vec{P}_i + \sum_{i=1}^n \vec{CA}_i \times \vec{P}_i \quad (4.9)$$

Първото събираемо в дясната страна на равенство (4.9) е моментът M_R на равнодействащата

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

Второто събираемо е моментът на системата спрямо т.О и според определението за равнодействаща е равно на нула. Така уравнение (4.9) добива вида

$$\vec{M} = \vec{r}_C \times \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{M}_R \quad (4.10)$$

Център на тежестта на система материални точки.

Нека да разгледаме система от n материални точки C_i , които са неподвижни и се намират в гравитационно поле (фиг.4.2). Теглата G_i на материалните точки представляват система от успоредни сили, които могат да бъдат представени като

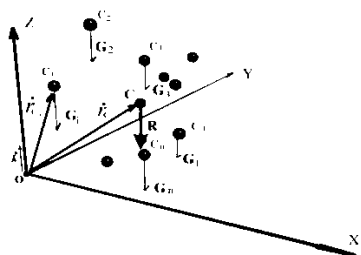
$$\vec{G}_i = e \vec{G}_i \quad (4.11)$$

където e е единичен вектор по направление на силите. Системата на успоредните сили има равнодействаща R , големината на която можем да определим като съберем силите.

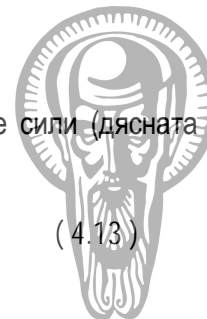
$$\vec{R} = e \vec{G} = e \sum_{i=1}^n G_i \quad (4.12)$$

Приложната точка на равнодействащата е геометрична точка т.С. Ако в т.С приложим сила P ,

противоположна на равнодействащата, то системата от материални точки ще бъде в устойчиво равновесие ($P+G=0$). Това означава, че т.С е център на тежестта на системата.



Фиг. 4.2



Моментът на равнодействащата, е равен на сумата от моментите на отделните сили (дясната страна на равенството):

$$\vec{r}_C \times \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{G}_i \quad (4.13)$$

Заместваме R и G_i се получава:

$$\vec{r}_C \times \vec{e}R = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{e}G_i \quad (4.14)$$

$$\vec{r}_C \times \vec{e}R = R\vec{r}_C \times \vec{e} \quad (4.15)$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{e}G_i = \left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i \right) \times \vec{e} \quad (4.16)$$

След преобразуване уравнение (4.15) добива вида

$$R\vec{r}_C \times \vec{e} = \left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i \right) \times \vec{e} . \quad (4.17)$$

За да е изпълнено това равенство, трябва множителите пред \vec{e} в лявата и дясната страна да са също равни:

$$R\vec{r}_C = \left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i \right) \quad (4.18)$$

Радиус-векторът на приложната точка на равнодействащата R, която е център на тежестта е:

$$\vec{r}_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i \right)}{R} \quad (4.19)$$

На практика се налага местоположението на т.С да бъде определено в една правоъгълна координатна система с помощта на координатите x_C , y_C и z_C :

$$x_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n G_i x_i \right)}{G} , \quad y_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n G_i y_i \right)}{G} , \quad z_C = \frac{\left(\sum_{i=1}^n G_i z_i \right)}{G} \quad (4.20)$$

Теглата на материалните точки могат да се представят като

$$G_i = m_i g \quad \text{и} \quad G = \sum_{i=1}^n m_i g = g \sum_{i=1}^n m_i = M g \quad (4.21)$$

където g е гравитационното ускорение, а M е пълната маса на системата от материални точки.

За т.С се получава:



$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M} \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M} \quad (4.22)$$

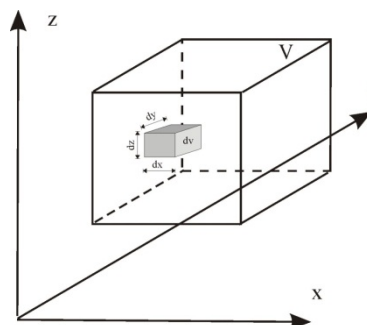
поради което тя се нарича още и “масов център” на системата.

Масов център на непрекъснати материални системи

Непрекъснатите материални системи се състоят от материални точки, плътно допрени една до друга, без празнини. Това са материални линии, материални повърхнини (плочи) и материални обеми (материални тела).

За система от материални точки масовият център т.С се определя от уравненията (4.20). В практиката обаче, по-често се налага да бъде намиран центърът на тежестта на масивни тела и плочи.

Един материален обем V може да бъде разглеждан като съвкупност от материални точки, така че и за неговият център на тежестта ще важат същите уравнения, както за система от материални точки. При материалния обем точките са плътно наредени една до друга и образуват непрекъснатата среда. Поради това сумите от уравненията на дискретната система ще бъдат заменени с интеграли за непрекъснатата материална система.



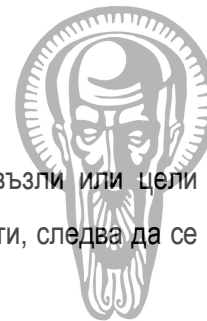
Фиг. 4.3

Ако координатите на един елементарен обем $dv=dx.dy.dz$ означим с X, Y, Z , както е показано на фиг.4.3, а елементарната маса на този обем представим като $dm=\rho.dv$, за масовия център ще получим

$$x_c = \frac{\int_V X \rho dv}{\int_V \rho dv} \quad , \quad y_c = \frac{\int_V Y \rho dv}{\int_V \rho dv} \quad \text{и} \quad z_c = \frac{\int_V Z \rho dv}{\int_V \rho dv} \quad (4.23)$$

При хомогенен материален обем масовата плътност е постоянна $= \text{const}$. (4.23) се преобразува в (4.24)

$$x_c = \frac{\int_V X dv}{V} \quad , \quad y_c = \frac{\int_V Y dv}{V} \quad \text{и} \quad z_c = \frac{\int_V Z dv}{V} \quad (4.24)$$



5. Реален обект и изчислителна схема

Реални обекти в Съпротивление на материалите могат да бъдат отделни тела, възли или цели съоръжения. Преди да бъдат извършени каквито и да са изчисления за реалните обекти, следва да се избере **изчислителна схема**;

Схематизация означава да се отхвърлят всички несъществени свойства на обекта, които не влияят изобщо или влияят слабо на изчислителния процес.

Схематизацията обхваща три страни на обекта и бива **физична, геометрична и силова** схематизация.

5.1. Схематизация на свойствата на материала

Отнася се до свойствата на материала, от който е направено тялото. В Съпротивление на материалите всички тела се считат за **деформируеми** и всички материали притежават притежават свойствата: **хомогенност, изотропност, идеална еластичност и имат непрекъснатата структура.**

5.2. Хипотези

Хомогенност и непрекъснатост на строежа

Допуска се, че конструкционните материали са непрекъсната хомогенна еднородна среда, независимо от тяхната микроструктура. Материалната среда запълва плътно заемания от нея обем и има едни и същи свойства във всяка точка от тялото. Считаме, че в материалите липсват пукнатини, шупли, неметални включвания и други дефекти.

Хипотеза за изотропност на материала

Допуска се, че физическите свойства на материала се еднакви във всички направления и всички точки. Има материали, които не се подчиняват на това свойство и имат различни свойства в направленията. Те се наричат анизотропни.

Хипотеза за идеална еластичност на материала

Допуска се, че тялото възстановява първоначалната си форма и размери след премахване на експлоатационното натоварване.

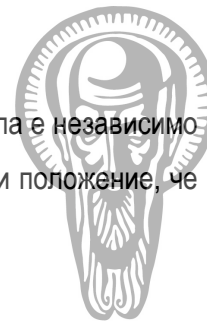
Закон на Хук

Приема се, че до определена граница, наречена граница на пропорционалността, във всяка точка от тялото зависимостта между вътрешните сили и свързаните с тях деформации е линейна – закон на Хук.

Хипотеза за постоянство на началните размери и форма.

Въз основа на опитни изследвания се приема, че натоварените тела в еластичната област променят формата и размерите си незначително, като преместванията на точките са толкова малки в сравнение с неговите размери, че те се пренебрегват.

Принцип на суперпозицията



При едновременно действие на няколко сили върху едно тяло, действието на всяка сила е независимо от действието на другите. Резултатът е равен на алгебричния сбор от резултатите, при положение, че силите се прилагат последователно в произволен ред.

Хипотеза на Бернули за неизменност на равнинните сечения

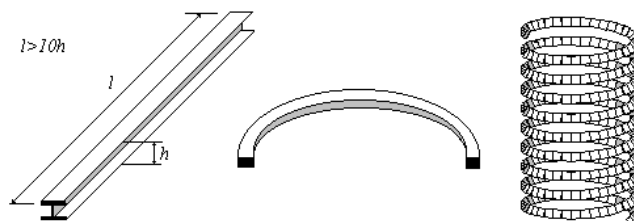
Приема се, че равно сечение, прекарано мислено през тялото преди деформацията, остава равнинно и след деформацията. В процеса на деформирането то се премества или завърта като идеално твърда плочка.

5.3. Схематизация на формата на конструктивните елементи

Геометричeskата схематизация означава да отнесем реалния обект към една или някаква съвкупност от следните три форми: **гредата, черупка или масивно тяло**.

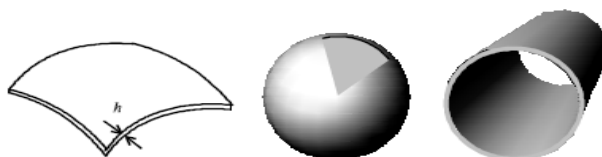
Под **гредата** разбираме тяло, единият размер на което е много по-голям от останалите два (поне 10 пъти по-голям).

Геометричното място на точки, съединяващи центровете на тежест на напречните сечения на гредата оформят нейната **ос**. В Съпротивление на материалите в повечето случаи ще изобразяваме гредата с нейната ос. Според формата на оста им, гредите могат да бъдат **праволинейни, криволинейни, равнинни и пространствени**.

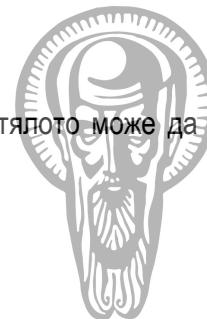


Фиг.5.1

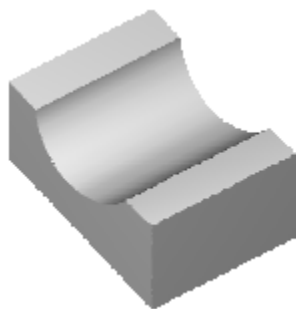
Черупка наричаме тяло, единият размер на което е много по-малък от останалите два – фиг.5.2. Геометричното място на точките, които разполовяват дебелината на черупката, наричаме **средна повърхнина** на черупката. Според вида на средната повърхнина, черупките могат да бъдат **ротационни** и с произволна форма. Когато средната повърхнина на черупката е равнина, получаваме **плоча**.



Фиг.5.2



Масивно тяло наричаме тяло, трите размера на което са съизмерими. Формата на тялото може да бъде произволна – фиг.5.3.



Фиг.5.3

В Съпротивление на материалите се разглеждат главно конструкции, съставени от тела с първата форма – греди и отчасти с втората форма – черупки и плочи.

5.4. Схематизация на натоварването. Класификация на външните натоварвания.

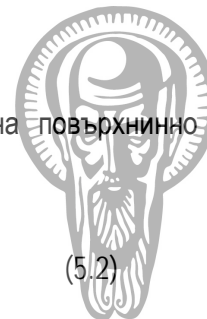
Външни натоварвания се наричат приложените към тялото сили и моменти, които са предизвикани от действието на други тела. Такива са собственото тегло на конструкциите и нейните елементи, силите с които съседните тела действат непосредствено на разглежданото тяло, опорните реакции и др. Те биват:

А. Съсредоточени сили и моменти, когато са приложени на много малка повърхнина от тялото. С достатъчно голяма точност се приема, че те са приложени в отделна точка от тялото и се изобразяват като вектори, които имат приложна точка, посока и големина. В някои случаи, когато външното натоварване действа на малка площ от тялото, то се свежда до двоица сили със съсредоточен момент.

Б.Обемно разпределени сили наричаме система от сили, които са приложени във всички точки от обема на тялото. Такива сили са силите на теглото, сили, породени от електрично или магнитно поле и др. Обемно разпределените сили се характеризират с величината k , която се нарича интензитет на обемните сили; dG е силата на тежестта, действаща в елементарния обем на тялото dV .

$$k = \frac{dG}{dV} = \gamma \text{ [N/m}^3\text{]}, \quad (5.1)$$

В. Повърхнинно разпределени сили наричаме система от сили, които са във всички точки от повърхнината /или част от нея/ на едно тяло. Такива са например силите, с които газовете и течностите действат на стените на съдовете, действието на телата върху опорите и др. Повърхнинно



разпределените сили се характеризират с величината p , наречена интензитет на повърхнинно разпределените сили:

$$p = \frac{dP}{dF}, [\text{Pa}] \quad (5.2)$$

Където dP е силата, действаща на елементарния лицев елемент dF .

Г. Линейно-разпределени сили са силите, които действат на тяло с голяма дължина и малки напречни размери. Приема се, че силите са разпределени по оста на тялото и представляват линейно-разпределен товар. Величината $q(x)$ се нарича интензитет (гъстота) на силите и се измерва с $[\text{N/m}]$.

$$q(x) = \frac{dP}{dx}, \quad (5.3)$$

Където dP е силата, действаща върху линейния елемент dx .

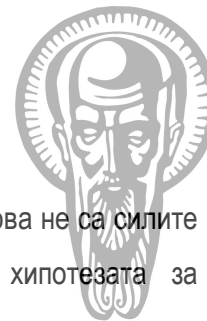
Фигурата, очертана от графиката $q(x)$, оста на гредата и граничните стойности на q , се нарича диаграма на изменението на интензитета на натоварването. В частност диаграмата може да бъде правоъгълник ($q=\text{const}$), триъгълник, трапец и т.н.

Съсредоточени сили и линейно разпределени товари реално не съществуват. Те могат да бъдат получени само в резултат на схематизацията на реалното натоварване на телата.

При съставяне на изчислителната схема в редица случаи действителното натоварване на конструктивните елементи не може да бъде заменено само със съсредоточени и разпределени сили. Има и моменти натоварвания, които се схематизират главно до съсредоточени и линейно разпределени моменти. Интензитетът на линейно-разпределените моменти $m(x)$, $[\text{N.m/m}]$ може да бъде променлива или постоянна величина.

Натоварването може да бъде прилагано към реалните обекти статично, динамично или циклично. При статично натоварване силите и моментите се прилагат бавно, като нарастват от 0 до своята крайна стойност, която обикновено се запазва постоянна. При това ускоренията, а следователно и инерционните сили са пренебрежимо малки и могат да се пренебрегнат при изграждане на моделното тяло.

При динамично натоварване натоварванията се прилагат с голяма скорост или веднъж с цялата си стойност (ударно натоварване). В такива случаи инерционните сили са значителни и участват в съставянето на изчислителната схема.



6. Въртешни усилия в конструктивните елементи

Въртешните сили са израз на взаимодействието между частиците на тялото. Това не са силите между атомите, а силите между частиците – елементарни обеми съгласно хипотезата за непрекъснатост, които се появяват като противодействие на външните сили.

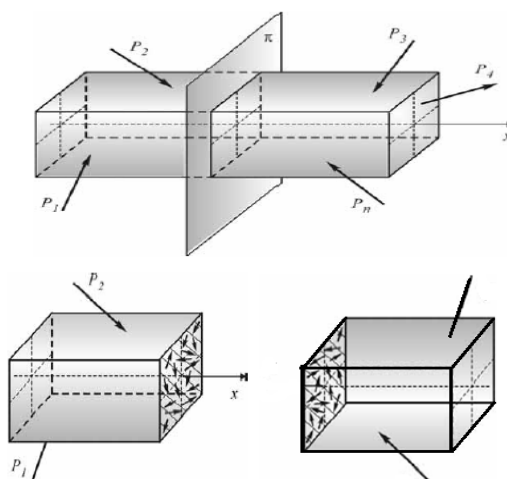
6.1. Метод на сечението за определяне на въртешни усилия

Ако мислено разрежем едно тяло (греда) с произволна равнина, силите на взаимодействие между частиците в общия случай не са известни по големина и по посока. Те действуват върху лявото и дясното сечение на тялото.

Въртешните усилия в един конструктивен елемент (греда) са сили и моменти между материалните частици на тялото, които възникват допълнително в резултат на приложено върху него външно натоварване.

Определянето на въртешните усилия се извършва по метода на сечението (метод на разреза). Въртешните сили действуват върху всяка от двете части от тялото.

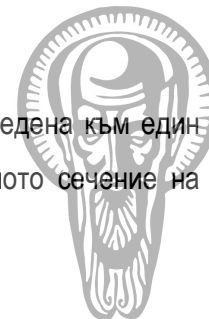
Ако мислено разрежем едно тяло (греда) с произволна равнина, силите на взаимодействие между частиците в общия случай не са известни по големина и по посока.



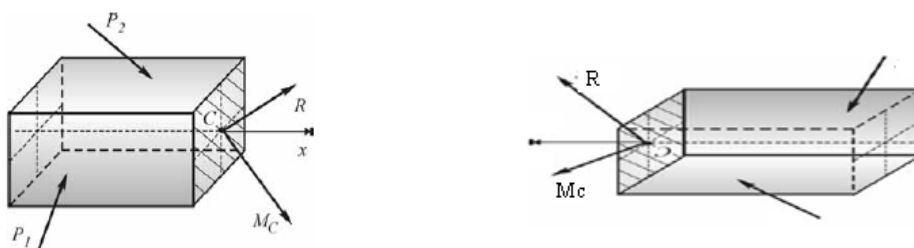
Фиг.6.1.

Нека S_I е системата сили, които действуват върху лявото сечение и S_{II} е системата сили, действащи в дясно сечение на тялото.

Двете системи сили са противоположни. Лявата част е в равновесие под действието на външните сили и системата сили S_I . Дясната част е в равновесие под действието на външните сили и S_{II} .



От Теоретичната механика е известно, че всяка система от сили може да бъде приведена към един главен вектор R и един главен момент M спрямо центъра на тежестта на напречното сечение на гредата.



Фиг.6.2.

Проекциите на главния вектор и главния момент върху трите координатни оси x, y, z (т.е. компонентите на динамата на елементарните разрезни сили) са съответно три сили и три момента, които се наричат вътрешни усилия, като тук понятието “усилие” се явява обобщение на понятията сила и момент.

$$\vec{R}_L + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{R}_D + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (6.1a)$$

$$\vec{M}_C + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

$$\vec{M}_C + \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

$$\mathbf{R}_L + \mathbf{R}_D = 0$$

$$\mathbf{M}_L + \mathbf{M}_D = 0$$

(6.1.6)

Векторни условия за равновесие

Компонентите на главния вектор R осите x, y, z са:

$$\mathbf{R} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

$R_x = N_x$ – нормална сила по x

$R_y = Q_y$ – срязваща сила по y

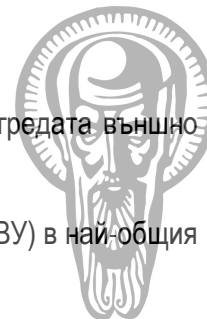
$R_z = Q_z$ – срязваща сила по z

Компонентите на главния момент M_c по осите x, y, z са

M_x – усукващ момент

M_y – огъващ момент по y

M_z – огъващ момент по z .



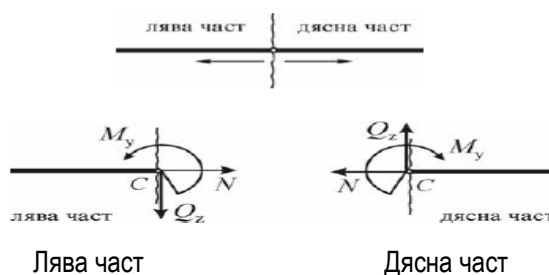
Вътрешните усилия изразяват съпротивата на материала срещу приложеното върху гредата външно натоварване, съответно на опън (натиск), срязване, усукване и огъване.

За греда, натоварена с произволна пространствена система сили, вътрешните усилия (ВУ) в най-общия случай са шест, приложени към лявата или десния част на гредата.

$$\begin{array}{lll}
 N_x + \sum P_{ix} = 0 & Q_y + \sum P_{iy} = 0 & Q_z + \sum P_{iz} = 0 \\
 M_x + \sum M_{ix} = 0 & M_y + \sum M_{iy} = 0 & M_z + \sum M_{iz} = 0
 \end{array} \quad (6.2)$$

При натоварване с равнинна система сили, например в равнината xz, вътрешните усилия в най-общия случай са три: N_x - нормално спрямо секущата вътрешно усилие; Q_z - тангенциално спрямо секущата вътрешно усилие; M_y - огъващ момент.

Тогава условията за равновесие, по които се намират трите неизвестни вътрешни усилия са:



$$\begin{array}{ll}
 N_x + \sum_{i=1}^k P_{x,i} = 0 & -N_x + \sum_{i=1}^k P_{x,i} = 0 \\
 Q_z + \sum_{i=1}^k P_{z,i} = 0 & -Q_z + \sum_{i=1}^k P_{z,i} = 0 \\
 M_{ог,y} + \sum_{i=1}^k M_{y,i} = 0 & -M_{ог,y} + \sum_{i=1}^k M_{y,i} = 0
 \end{array} \quad (6.3)$$

За да определим вътрешните усилия, предварително е необходимо да бъдат определени всички външни сили върху тялото, в това число и опорните реакции.

Когато вътрешните усилия действуват поединично, получаваме следните видове съпротиви :

Чист опън – действа само нормалната сила ($N_x > 0$);

Чист натиск – действа само нормална сила ($N_x < 0$);

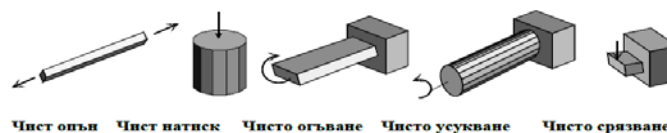
Чисто огъване – действа само огъващ момент; $M_{ог,y}$ или $M_{ог,z}$;



Чисто усукване – действа само усукващ момент; M_x ;

Чисто срязване – действа само срязваща сила Q_z ;

Ако действуват едновременно две или повече разрезни усилия, получаваме сложно натоварване.



Фиг.6.3.

Вътрешните усилия са причината за разрушаване на телата. Следователно важна задача в техническата механика е да се определи разпределението на вътрешните усилия в конструктивните елементи и да се определят техните максимални стойности.

6.2. Вътрешни усилия в прави греди, натоварени с равнинни системи съсредоточени сили

Конструктивните елементи, които се срещат най-често в практиката, могат да се разглеждат като прави греди, които са натоварени с равнинни системи и моменти. Равнината, в която действат силите и двоиците сили, се нарича равнина на натоварването.

Избира се фиксирана координатна система с начало в левия край на гредата и координатни оси, ориентирани, както в описаната по-горе координатна система, т.е. Ox съвпада с геометричната ос на гредата и е насочена надясно, Oy е насочена към наблюдателя, а Oz е насочена надолу.

Под геометрична ос на конструктивен елемент се разбира геометричното място на центровете на тежестта на напречните (спрямо оста Ox) сечения на конструктивния елемент.

При така избраната координатна система изразите (6.2) и (6.3) остават непроменени. Решението на задачите за вътрешни усилия не зависят от избора на координатната система.

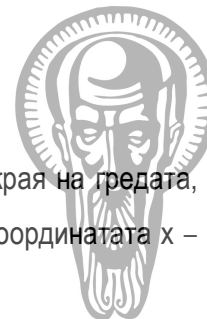
Алгоритъм за определяне на вътрешни усилия

1. Определят се опорните реакции. Те представляват външни сили за гредата и се намират с използване на известни методи от статиката.

2. Гредата се разделя на участъци.

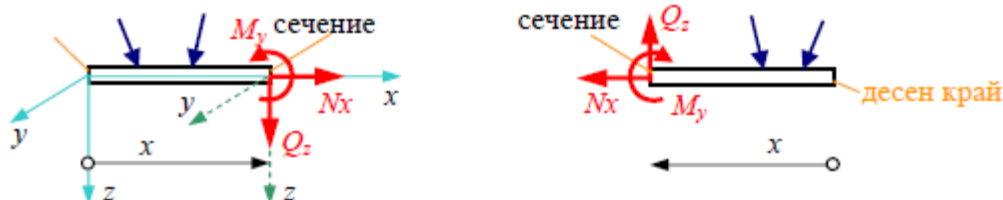
За граници на участъци служат: опорите, приложените точки на съсредоточените сили и моменти, местата на промяна на интензивността на разпределените товари, местата, в която гредата мени формата и/или размерите на напречното си сечение.

3. Прави се произволно сечение през всеки участък. Гредата се разделя на лява и дясна част. Разглежда се отделя по-просто натоварената част.



4. Прави се схема на отделената част

Схемата съдържа товарите, опорните реакции, координатата x на сечението спрямо края на гредата, неизвестните вътрешни усилия (с червено). Записват се границите на изменение на координатата x – това са координатите x на границите на разглеждания участък.



5. Съставят се уравненията на вътрешните усилия за всеки участък

$$\sum X_i = 0; N_x = \dots;$$

$$\sum Z_i = 0; Q_z = \dots;$$

- $\sum M_{y_i} \text{ сеч.} = 0; M_y = \dots$ (уравнението на M_y се съставя спрямо сечението с център на тежестта);
- Пресмятат се стойностите на N_x , Q_z и M_y в границите на участъка;
- Ако уравнението на някое вътрешно усилие е различно от константа или права линия (например квадратна парабола), това уравнение се изследва за екстремуми. Пресмята се положението и стойността на екстремумите.

6. Построяване на диаграми на вътрешните усилия

- Графиките се строят една под друга върху оси, успоредни на оста на гредата;
- Положителната посока на диаграмите $N(x)$ и $Q_z(x)$ е над оста на гредата. Положителната посока на диаграмата $M_y(x)$ е под оста на гредата;

Върху диаграмата се поставя знакът на вътрешното усилие.;

Диаграмата се щрихова с линии, перпендикулярни на оста на гредата;

Върху диаграмите се нанасят характерни стойности на вътрешното усилие - стойностите в границите на участъци; мястото и стойността на екстремумите, ако има такива.

7. Проверка на диаграмите на вътрешните усилия

7.1. Проверка за вид на кривите в даден участък

7.2. Проверка за скокове (прави се от ляво на дясно)

- Съсредоточена сила P_x по ос x предизвиква скок в N -диаграмата с големината на P_x ;
- Съсредоточена сила P_z по ос z предизвиква скок в Q_z -диаграмата с големината и посоката на P_z ;
- Съсредоточена сила P_z по ос z предизвиква рогова точка (връх) в M_y -диаграмата по посоката на P_z , ако в същото сечение няма скок в M_y -диаграмата;
- Съсредоточен момент M около ос y предизвиква скок в M_y -диаграмата, с големината на M .

Посоката на скока също може да се провери, като се използва правилото:



• Ако се постави момента M върху M_y -диаграмата от външната ѝ страна, стрелката на момента трябва да сочи към скока.

7.3. Проверка за екстремуми

Ако в даден участък Q_z сменя знака си, то в сечението, в което $Q_z = 0$, M_y има екстремум.

Координатата на екстремума x_{extr} се получава от уравнението $Q_z(x) = 0$, а самият екстремум е $extr M_y = M_y(x=x_{extr})$.

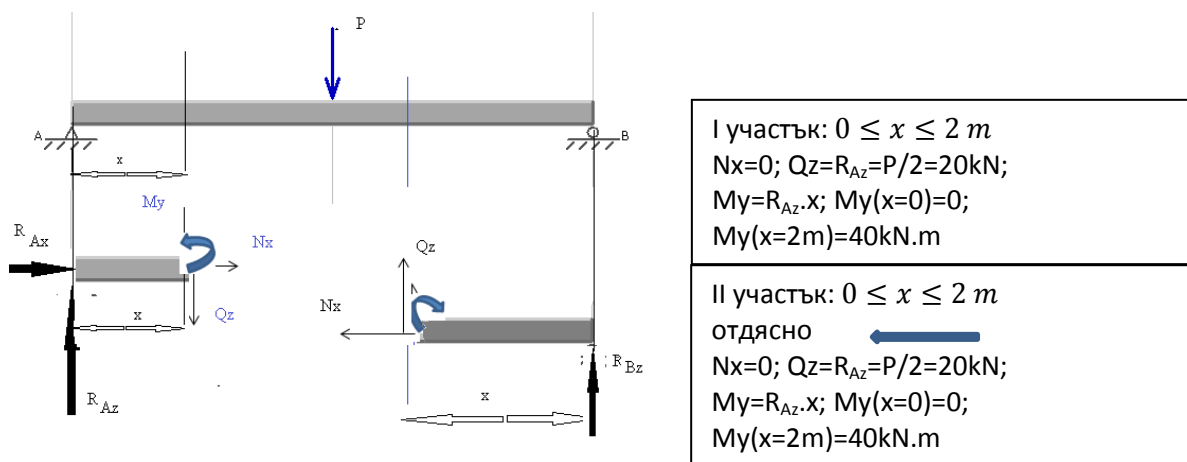
Пример 1:

Да се определят вътрешните усилия на гредата, показана на фиг. 6.4. Дължината е 4 m. В левия край има неподвижна опора, а в десния- подвижна ставна опора. Натоварена е в средата със сила $P=40\text{kN}$, лежаща в равнината xOz , която е равнина на натоварването.

Опорни реакции

$$R_{Ax}=0; R_{Az}=P/2=20\text{kN}; R_{Bz}=P/2=20\text{kN}$$

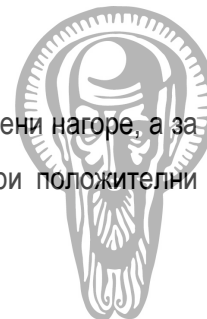
Тази греда има 2 участъка: I участък – от левия край на гредата до сечението, в което е приложена силата $0 \leq x \leq 2\text{ m}$, а II участък – от това сечение до десния край на гредата. Разглеждаме дясна част с начало т.В.



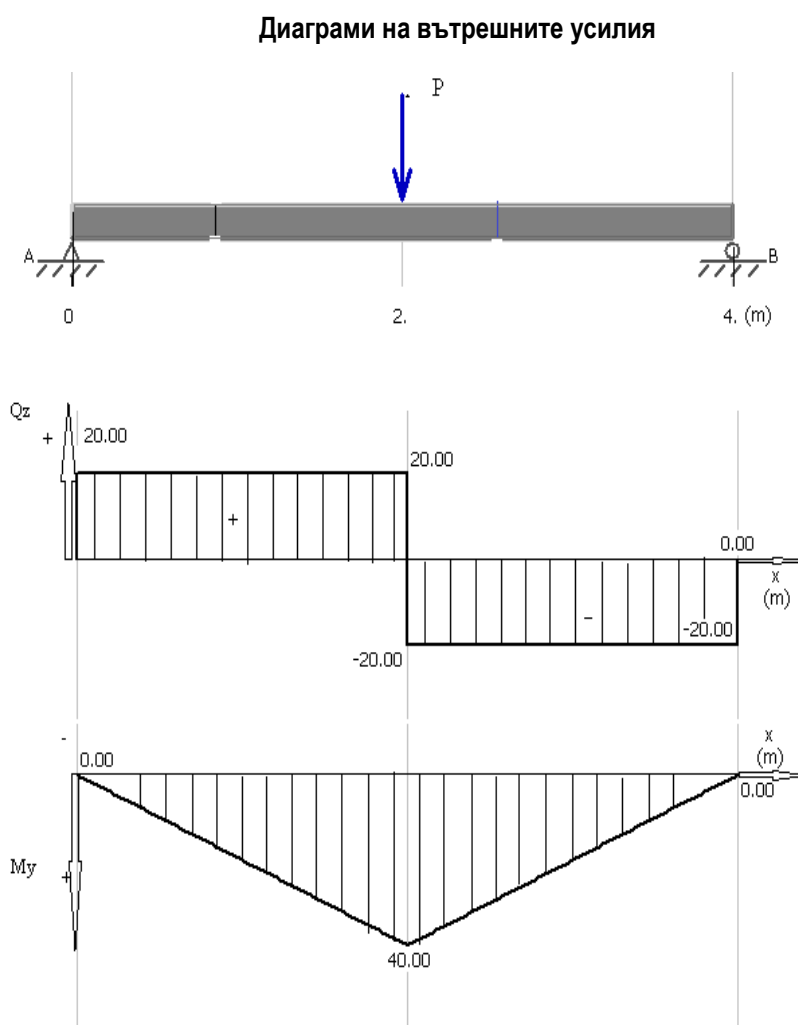
Фиг.6.4

За начертаване на диаграмите на вътрешните усилия са използвани получените уравнения за двата участъка на гредата. Тангенциалните усилия в двата участъка са константни и не зависят от x , но са различни за двата участъка.

Огъващите моменти $M_y=M_0g$ за двата участъка са линейни функции на x и се представят с различни уравнения.



При начертване на диаграмите е прието положителните ординати за N_x и Q_z са насочени нагоре, а за диаграмите на огъващия момент- надолу. Последното се определя от факта, че при положителни огъващи моменти гредата се огъва надолу.



Фиг.6.5

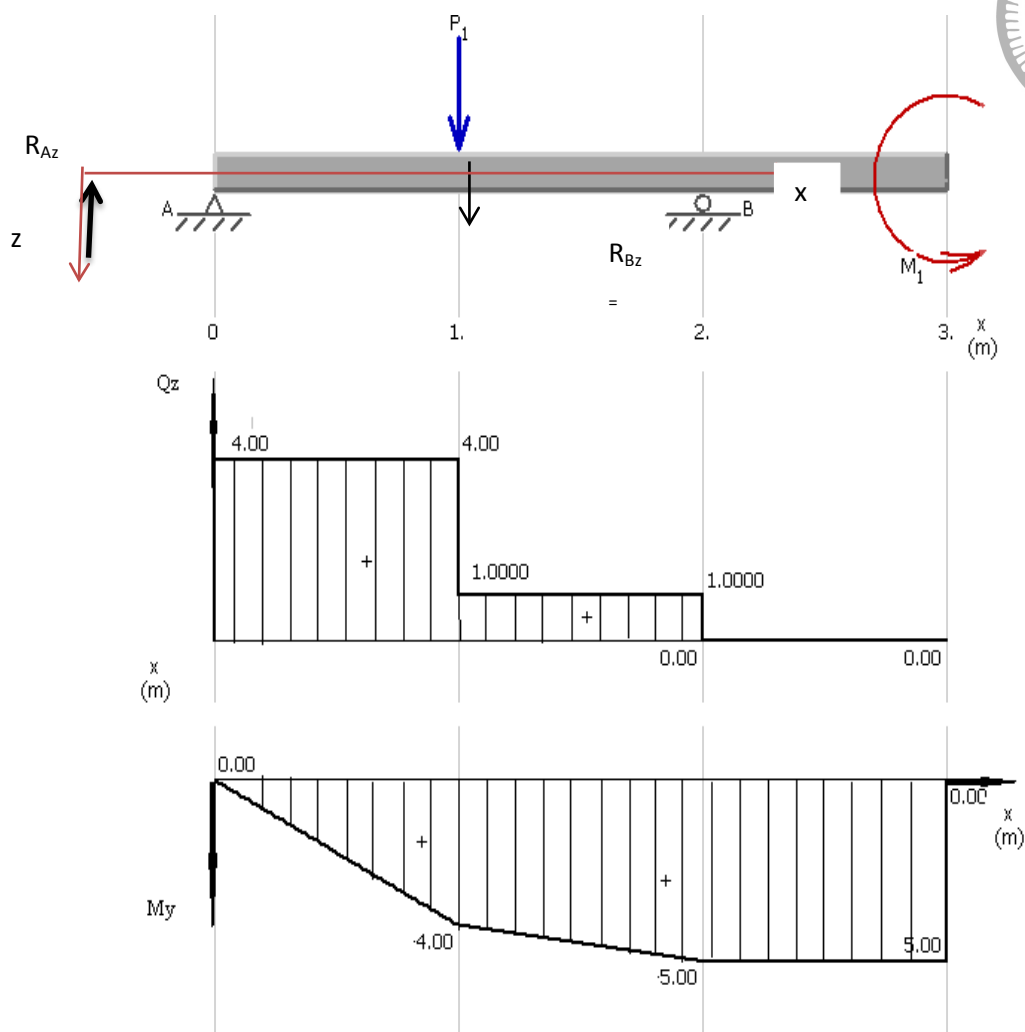
Пример 2. Да се определят вътрешните усилия и да се начертаят диаграмите им за гредата, показана на фиг. 6.6. $P_1=3\text{kN}$, $M_1=5\text{kN.m}$, $L=3$ m.

Опорни реакции: $R_{Az}=4\text{kN}$ нагоре; $R_{Bz}=1$ kN надолу.

Диаграми на вътрешните усилия

Тангенциалните усилия в трите участъка са различни, но са постоянни във всеки участък.

Огъващият момент M_y за първите два участъка се изменя по линеен закон, а в третия участък има постоянна стойност, равна на съсредоточения момент в десния край на гредата.



Фиг.6.6

Пример 3: Да се определят вътрешните усилия и да се начертаят диаграмите им за гредата, показана на фиг. 6.7.

$P_1=5\text{kN}$, $M_1=2\text{kN}\cdot\text{m}$, $P_2=8\text{kN}$, $L=3\text{ m}$

1. Определяне на опорни реакции

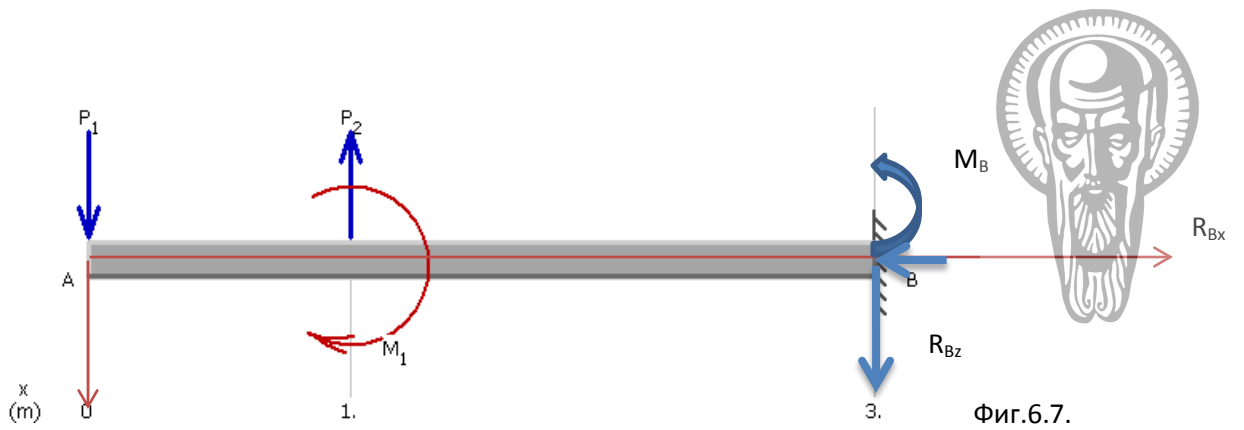
Опорните реакции (R_{Bx} , R_{Bz} , M_B) в запъващата опора се намират от условията за равновесие за цялата греда.

$$P_1 - P_2 + R_{Bz} = 0 ; R_{Bz} = P_2 - P_1 = 3\text{kN}$$



$$(+)\sum M_B = 0 ; P_1 \cdot L - M_1 - P_2 \cdot 2 + M_B = 0 ; M_B = P_2 \cdot 2 + M_1 - P_1 \cdot 3 = 3\text{ kNm}$$

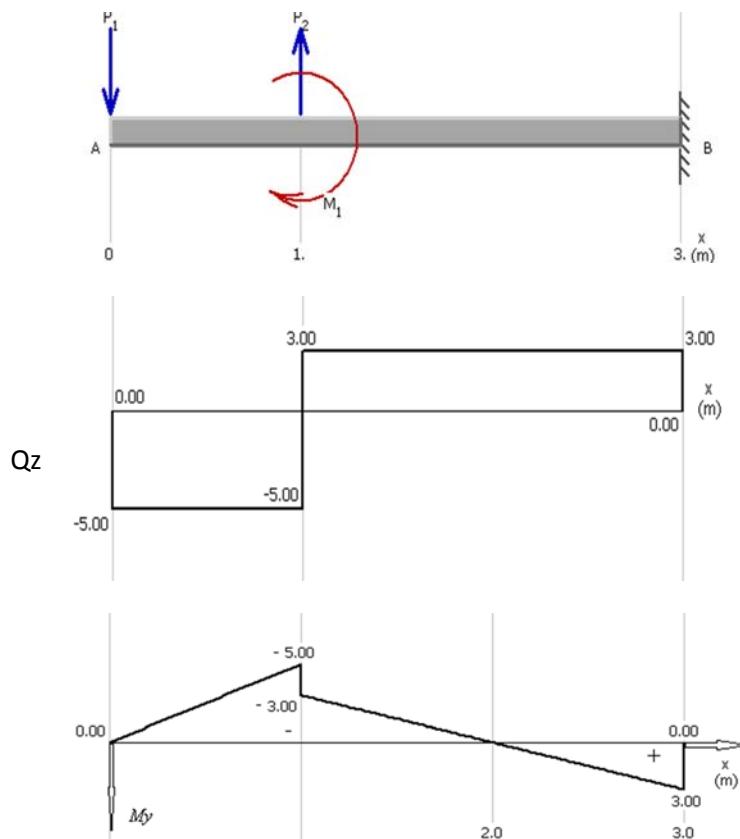
$$\text{Проверка: } (+)\sum M_A = 0 ; -M_1 + P_2 \cdot 1 + M_B - R_{Bz} \cdot 3 = 0 ; 0 = 0$$



Фиг.6.7.

<p>I участък: $0 \leq x \leq 1 \text{ m}$ $N_x=0; Q_z=R_{Az}=P_1=5\text{kN};$ $\sum M_c = 0; M_y+P_1 \cdot x=0; M_y(x=0)=0;$ $M_y(x=1\text{m})=-5\text{kN}\cdot\text{m}$</p>	<p>II участък: $0 \leq x \leq 2 \text{ m}$ отдясно $N_x=0; Q_z-R_{Bz}=0; Q_z=R_{Bz}=3 \text{ kN}$ $\sum M_c = 0; -M_y + M_B - R_{Bz} \cdot x = 0$ $M_y=M_B-R_{Bz} \cdot x; M_y(x=0)=3\text{kNm}; M_y(x=2\text{m})=-3 \text{ kN}\cdot\text{m}$</p>
---	---

Диаграми на вътрешните усилия



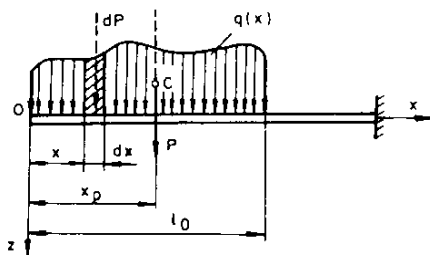
Фиг.6.8



6.3. Вътрешни усилия в прави греди, натоварени с разпределени товари

6.3.1. Големина и приложна точка на равнодействащата на линейно разпределен товар

Товарът върху една греда се смята, че е линейно разпределен, ако по дължината на даден интервал действа непрекъснатата система сили (фиг.6.9).



Фиг.6.9.

Върху елементарната дължина dx действа безкрайно малката съсредоточена външна сила dP , която е пропорционална на dx , т.е.

$$dP = q(x)dx, \quad (6.4)$$

Където множителят

$$q(x) = \frac{dP}{dx}, \quad N/m, \quad (6.5)$$

се нарича интензитет на натоварването.

Тъй като силите dP са успоредни по между си и еднопосочни, те имат равнодействаща, която се пресмята по формулата:

$$P = \int dP = \int_0^{l_0} q(x)dx \quad (6.6)$$

Величината под интеграла е пропорционална на елементарното лице на диаграмата на $q(x)$, заключено в интервала dx , т.е. равнодействащата P е пропорционална на цялото лице на диаграмата $q(x)$ за дължината, която действа разпределения товар l_0 .

За системата успоредни и еднопосочни сили dP е валидна теоремата на Варинюн, която гласи: ако една система външни сили има равнодействаща, главният момент на системата сили спрямо дадена точка е равен на момента на равнодействащата на системата сили спрямо същата точка.

Следователно:

$$x_p \cdot P = \int x dP = \int_0^{l_0} xq(x)dx, \quad (6.7)$$

Където в лявата страна е моментът на P спрямо т.0, а дясната страна е главният момент на системата сили, образувана от dP .

След преобразуване се получава координатата на центъра на тежестта на равнинната фигура x_p , представляваща диаграмата на $q(x)$



$$x_P = \frac{1}{P} \int x dP \quad (6.8)$$

Равнодействащата на разпределения товар е пропорционална на лицето на фигурата, която го представя, и е приложена в центъра на тежестта на тази фигура.

6.3.2. Вътрешни усилия в греда, натоварена с равномерно линейно разпределен товар

Разглеждаме греда, натоварено с линейно разпределен товар (фиг.6.10): $q=5\text{kN/m}$, $L=2\text{m}$.

Равнодействащата $P_q=q \cdot L$ е приложена в средата на гредата.

Поради симетрията на натоварването и геометричните параметри опорните реакции са $R_{Az}=R_{Bz}=5\text{kN}$.

Гредата има един участък $0 \leq x \leq L=2\text{m}$

$$Q_z(x) = R_{Az} - q \cdot x$$

$$Q_z(x=0) = R_{Az} = 5\text{kN}; Q_z(x=2\text{m}) = -R_{Bz} = -5\text{kN}$$

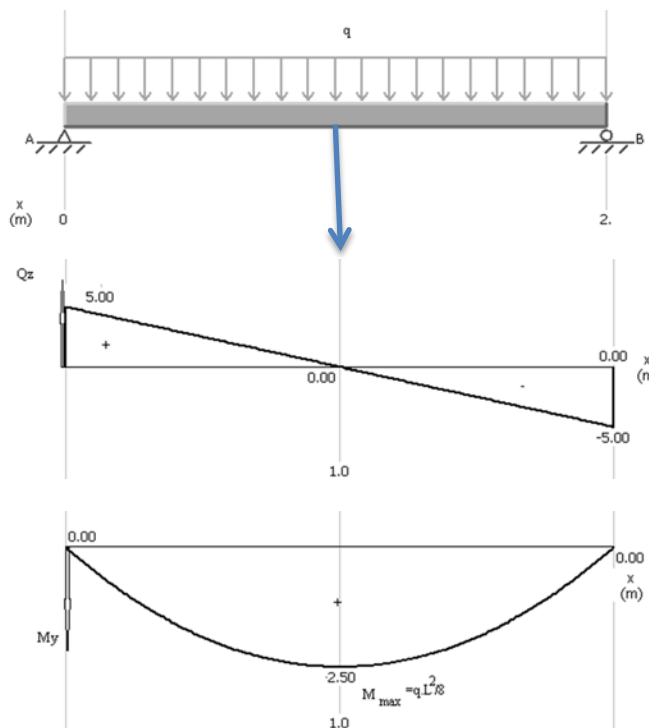
$$Q_z = 0 \text{ при } x = 1\text{m}$$

$$M_{or}(x) = R_{Az}x - qx^2/2$$

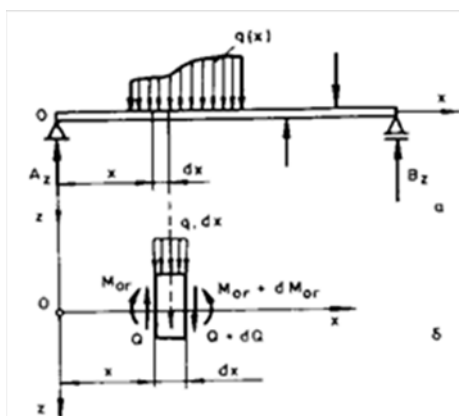
$$M_{or}(x=0) = 0$$

$$M_{or}(x=2\text{m}) = 0$$

$$M_{or}(x=1\text{m}) = q \cdot L^2/8$$



Фиг.6.10.

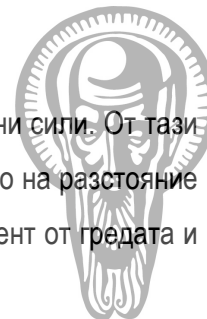


фиг. 6.10

6.4. Диференциални зависимости между интензитета на натоварването, тангенциалното усилие и огъващия момент.

За проверяване на уравненията за определяне на вътрешните усилия и на диаграмите им, се използват математически зависимости, с които те са свързани помежду си.

За установяване на зависимостите, се разглежда



гредата, показана на фиг. 6.10а, която е натоварена със съсредоточени и разпределени сили. От тази гредата, в интервала на разпределения товар, чрез две безкрайно близки сечения, едното на разстояние x от левия край, а другото на разстояние dx от него, се изрязва безкрайно малък елемент от гредата и се разглежда (фиг. 6.10б).

Тъй като гредата е в равновесие преди да бъде разрязана, разглежданият елемент също трябва да бъде в равновесие под действие на външните сили, действащи върху него, и вътрешните разрезни усилия в двете сечения.

Разрезните усилия Q_z и $M_{ог} = M_{ог}$, приложени в лявото сечение, представляват действието на силите от лявата част на гредата върху отделения елемент, а разрезните усилия $Q+dQ$ и $M_{ог}+dM_{ог}$ представляват действието на силите от дясната част на гредата върху разглеждания елемент. Разликите в разрезните усилия в двете сечения, ограничаващи елемента, се дължат на външните сили, действащи върху него.

Условието за равновесието на силите по направление на оста Oz е:

$$-Q + qdx + (Q + dQ) = 0 \quad (6.9)$$

Получава се:

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x) \quad (6.10)$$

Условието за равновесие на моментите спрямо ос, успоредна на Oy , минаваща през центъра на тежестта C на дясното сечение, е:

$$-M_{ог} - Qdx + qdx \frac{dx}{2} + (M_{ог} + dM_{ог}) = 0 \quad (6.11)$$

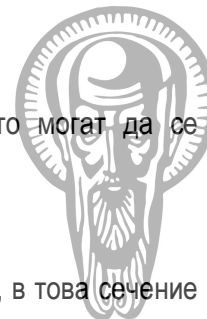
Като се пренебрегне членът $q \frac{dx^2}{2}$ като безкрайно малка величина от по-висок порядък спрямо останалите, се получава

$$\frac{dM_{ог}}{dx} = Q(x) \quad (6.12)$$

Ако се намери производната на този израз спрямо x и се отчете (6.3), се получава

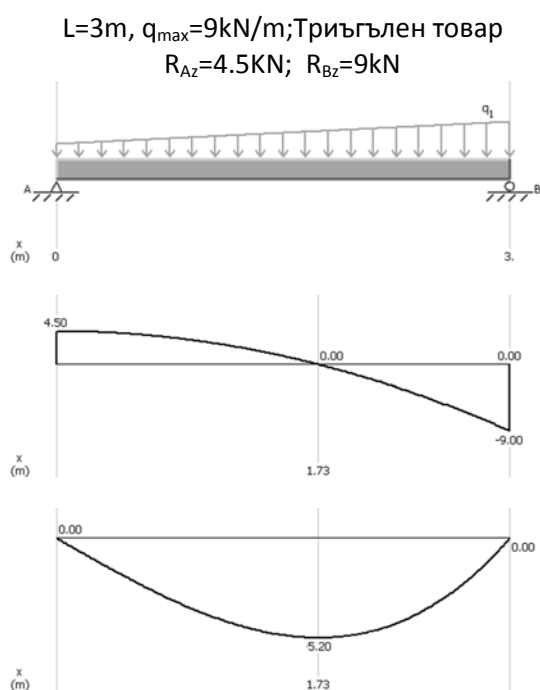
$$\frac{d^2 M_{ог}}{dx^2} = \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad (6.13)$$

Получените изрази се наричат диференциални зависимости между интензитета на натоварването $q(x)$, тангенциалното усилие $Q_z(x)$ и огъващия момент $M_{ог}(x)$.

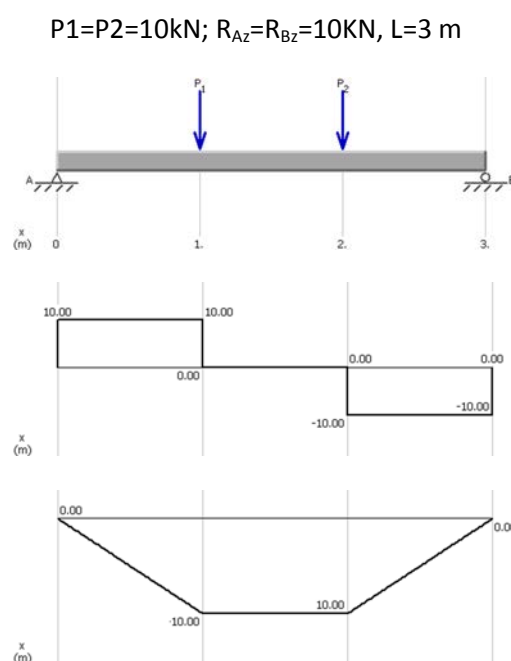


От анализа на диференциалните зависимости може да се направят изводи, които могат да се използват за проверка на диаграмите на вътрешните усилия.

1. От (6.10) следва, че ако в дадено сечение на гредата или интервал $q(x)$ е нула, в това сечение $Q(x)$ има екстремна стойност (в този интервал $Q=\text{const}$)
2. От (6.12) следва, че ако в дадено сечение на гредата $Q(x) = 0$, в това сечение $M(x)$ има екстремна стойност (в този интервал $M(x)=\text{const}$)
3. В двата края на гредата, подпряна на опори, огъващите моменти са 0.
4. Скокът в диаграмата на тангенциалното усилие Q е равен на съсредоточената сила, действаща на съответното сечение.
5. На границата на два съседни участъка огъващите моменти са еднакви. Изключение правят случаите, когато там има съсредоточен момент. В тези случаи скоковете в диаграмите са равни на моментите, съсредоточени в тези сечения.



Фиг. 6.12



Фиг.6.13

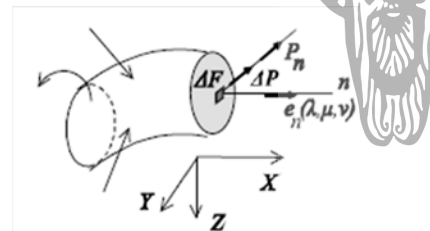


6.5. Напрежение

Определение за механично напрежение

Разглеждаме произволно напречно сечение от натовареното тяло – фиг. 6.14.

При натоварване между частиците на двете части на тялото възникват сили, които в общия случай са с неизвестна посока и големина.



Фиг.6.14

Разглеждаме една произволна точка от това сечение и елементарна площадка ΔF в сечението.

Ориентацията на площадката (сечението) се дава с нормалата n към нея, т.е. с единичния вектор на нормалата $e_n(\lambda, \mu, \nu)$.

Нека силата, която действа върху площадката бъде ΔP . В общият случай тази сила е в общо положение спрямо площадката.

По определение **пълно механично напрежение** p_n в разглежданата площадка наричаме

$$p_n = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta F}, \quad [\text{N/m}^2] \quad (6.14)$$

Така определено, пълното напрежение съвпада с направлението на силата, която го предизвиква. В общият случай напрежението зависи както от положението на точката, така и от ориентацията на площадката, минаваща през тази точка, т.е.:

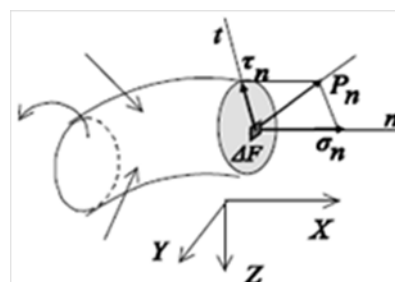
$$p_n = f(x, y, z, \lambda, \mu, \nu) \quad (6.15)$$

Нормално и тангенциално напрежение

Направлението на пълното напрежение и нормалата n образуват равнина, която пресича разглежданото сечение от тялото по правата линия t (тангента).

Разлагаме пълното напрежение по нормалата и тангентата.

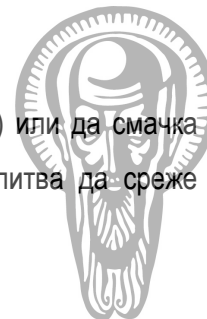
$$p_n = \sigma_n + \tau_n \quad (6.16)$$



Фиг.6.15

Компонентата на пълното напрежение по нормалата към площадката наричаме **нормално напрежение**, а компонентата, лежаща в площадката, наричаме **тангенциално** (или **срязващо**) напрежение. Нормалното напрежение се бележи с σ , а тангенциалното с τ .

Нормалното и тангенциалното напрежения имат определен физически смисъл, докато на пълното напрежение не може да се даде такъв.



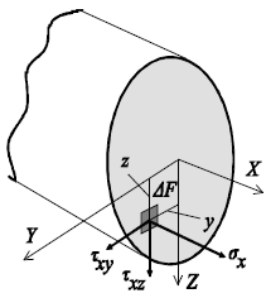
Нормалното напрежение се опитва да разкъса (когато е положително или **опъново**) или да смачка (когато е отрицателно или **натисково**) тялото, а тангенциалното напрежение се опитва да среже тялото (то е **срязващо**).

Връзки между вътрешните усилия и напреженията

Ако разложим пълното напрежение по осите на правоъгълната координатна система XYZ , в която определяме разрезните усилия – фиг.6.16 можем да запишем:

$$p_n = \sigma_n + \tau_n = \sigma_x + \tau_{xy} + \tau_{xz} \quad (6.17)$$

Фиг. 6.16



Както се вижда от фиг. 6.16 индексът на нормалното напрежение и първият индекс на тангенциалното напрежение показват нормалата на площадката, а вторият индекс на тангенциалното напрежение – направлението на действие. Нормалното напрежение σ_x и двете тангенциални напрежения τ_{xy} и τ_{xz} създават сили и моменти по и около осите на координатната система, които се определят по следните формули:

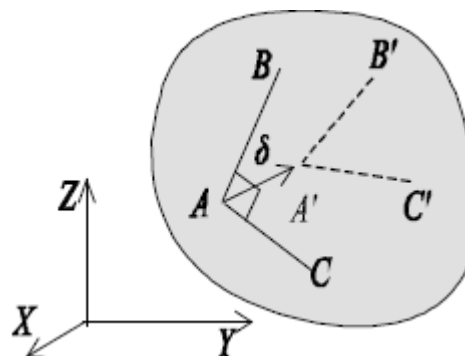
$$\begin{aligned} dN &= \sigma_x dF & \rightarrow & N = \int_F \sigma_x dF \\ dM_y &= dN \cdot z = \sigma_x dF \cdot z & \rightarrow & M_y = \int_F \sigma_x \cdot z dF \\ dM_z &= dN \cdot y = \sigma_x dF \cdot y & \rightarrow & M_z = \int_F \sigma_x \cdot y dF \\ dQ_y &= \tau_{xy} dF & \rightarrow & Q_y = \int_F \tau_{xy} dF \\ dQ_z &= \tau_{xz} dF & \rightarrow & Q_z = \int_F \tau_{xz} dF \end{aligned} \quad (6.18)$$

6.6. Преместване и деформация

Определение за линейна деформация

Разглеждаме деформируемо тяло, натоварено с уравновесена система от сили – фиг. 6.17.

Произволна точка А от тялото след деформирането му се премества в положение А'.

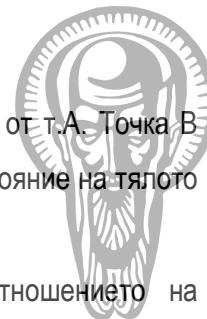


Векторът $\mathbf{AA}' = \delta$ се нарича **пълно преместване** на т.А.

$$\delta = \begin{Bmatrix} U \\ V \\ W \end{Bmatrix}$$

В координатната система XYZ пълното преместване има по три компоненти, които се отбелязват с U, V и W .

Те представляват преместването на т.А по ос X , по ос Y и по ос Z .



Нека разгледаме друга точка В, която се намира на безкрайно малко разстояние dr от т.А. Точка В също се премества при деформиране. Нека нейното положение в деформираното състояние на тялото да бъде В'. При натоварване разстоянието между точките ще се промени.

По определение **пълна линейна деформация** (ε) в т.А наричаме отношението на удължението или свиването на отсечката АВ към дължината на самата отсечка АВ:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB}, \% \quad (6.19)$$

Тя е безразмерна величина.

Ако отсечката АВ се удължава, линейната деформация е положителна, а когато се скъсява е отрицателна.

Ако отсечката АВ е насочена по ос Х, деформацията се бележи с ε_x . Аналогично деформациите по осите у и z бележим с ε_y и ε_z . Или в координатната система XYZ ще имаме три линейни деформации: $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z\}$.

Определение за ъглова деформация

Нека да разгледаме три точки А, В, С, които са близко една до друга и образуват прав ъгъл – фиг. 6.17 В деформирано състояние на тялото нека положението на точките е А', В', С'.

По определение **пълна ъглова деформация** (γ) в околността на т.А в равнината, образувана от отсечките АВ и ВС, наричаме разликата между ъглите ВАС и В'А'С', т.е.:

$$\gamma = \text{ВАС} - \text{В'А'С'} \quad [\text{rad}] \quad (6.20)$$

Следва, че ако правият ъгъл стане остър, ъгловата деформация е положителна, в противен случай е отрицателна.

Ако равнината на отсечките АВ и ВС съвпадне с равнината ХУ, ъгловата деформация бележим с γ_{xy} . Аналогично имаме още две ъглови деформации в другите две координатни равнини YZ и ZX. Или в координатната система XYZ ще имаме следните три ъглови деформации: $\{\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}$

Съвкупността от всички линейни и ъглови деформации в дадена точка определят т.н. **деформирано състояние, което се представя с тензор на деформациите, съставен от линейните ($\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$) и ъгловите деформации ($\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yx}, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}, \gamma_{zy}$) в околността на една точка.**



7. Елементи, подложени на опън, натиск и срязване

7.1. Центричен опън и натиск

7.1.1. Основни понятия

Центричен опън-натиск имаме, когато в напречното сечение на пръта действа единствено нормална сила. Когато $N_x > 0$, имаме **центричен опън**, а когато $N_x < 0$ – **центричен натиск**.

7.1.2. Напрежения в напречно сечение, перпендикулярно на оста

Ако разгледаме прът с праволинейна ос и с постоянно напречно сечение, подложен на центричен опън, за сеченията, достатъчно далече от местата на прилагане на силите е валидна хипотезата за равнинните сечения, т.е. всяко напречно сечение на пръта преди и след натоварването остава равнинно.

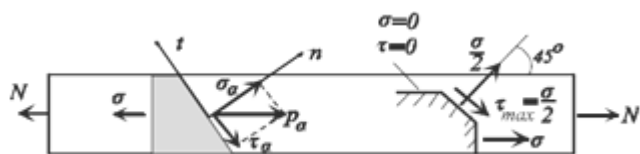
Следователно всички влакна, успоредни на оста на пръта, изпитват едно и също удължение, а значи и една и съща относителна линейна деформация ε . От закона на **Хук** за опъната нишка ($\sigma = E\varepsilon$) следва, че напреженията по цялото напречно сечение са едни и същи.

От интегралната връзка между нормалната сила и напреженията следва, че щом напрежението е постоянно, тогава $N = \sigma_x F$, откъдето за напрежението в напречното сечение се получава:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{F} \quad (7.1)$$

7.1.3. Напрежения по наклонена площадка

Ако прекараме наклонена площадка с нормала, сключваща с ос X ъгъл α , върху нея в общия случай ще действуват пълно, нормално и тангенциално напрежение (фиг.7.1).

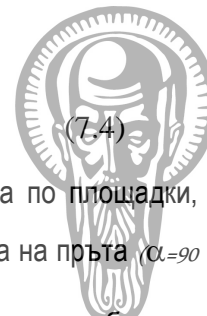


Фиг. 7.1

От условието за равновесие на елемента, записваме:

$$\sum X = 0 \rightarrow p_\alpha F_\alpha - \sigma_x F = 0; p_\alpha = \sigma_x \frac{F}{F_\alpha} \quad (7.2)$$

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma_x \cdot \cos^2 \alpha \quad (7.3)$$



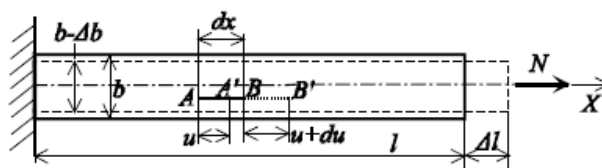
$$\tau_{\alpha} = -p \sin \alpha = -\sigma_x \sin \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha \quad (7.4)$$

Максималното тангенциално напрежение при центричен опън/натиск възниква по площадки, наклонени под ъгъл ± 45 градуса спрямо оста на пръта; По площадки, успоредни на оста на пръта ($\alpha = 90^\circ$), напреженията са равни на нула, т.е. прътът може да се разгледа като отделни нишки, работещи съвместно, без да е необходимо те да бъдат по някакъв начин слепени една към друга.

Фактът, че по площадки, наклонени под ъгъл 45 градуса, възникват максимални тангенциални напрежения, обяснява защо материали, които се съпротивляват слабо на срязване, при натоварване на опън/натиск се разрушават по тази равнина. Тангенциалните напрежения по две взаимно перпендикулярни площадки са равни по големина. Те са насочени към общия ръб на площадката или бягат от него. /Закон за взаимност на тангенциалните напрежения/

7.1.4. Деформирано състояние при опън и натиск

При опън прътът се удължава, а в напречно направление изтънява. Това е забелязано за пръв път от **Поасон** (1781-1850), който изпитвайки стоманени пръти на опън, установил, че в напречно направление прътът се деформира около четири пъти по-малко, отколкото в надлъжно направление.



Фиг.7.2

Изменението на дължината на пръта Δl се нарича **абсолютно линейно надлъжно удължение**.

Изменението на напречния размер на пръта Δb наричаме **абсолютно напречно свиване**.

Относителна надлъжна линейна деформация

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (7.5)$$

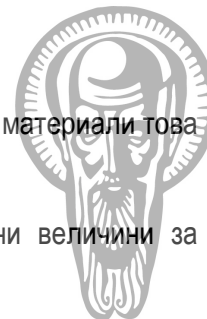
Относителна напречна линейна деформация

$$\varepsilon = -\frac{\Delta b}{b} \quad (7.6)$$

Отношението между напречната и надлъжната деформация е постоянна величина.

$$\mu = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon} \quad (7.7)$$

Това отношение се нарича **коэффициент на Поасон**. Знакът (-) пред отношението се взема, защото μ е положително число, а напречната и надлъжната относителни деформации имат винаги противни знаци



– ако прътът се удължава, в напречно направление се свива и обратно. За различните материали това отношение е различно, но винаги се намира в границите 0-0.5. За стомани е 0.22-0.3.

Модулът на линейна деформация и коефициентът на Поасон са постоянни величини за материала и характеризират неговите еластични свойства.

От връзката между нормално усилие N_x и нормално напрежение $\sigma = \frac{N_x}{F}$, относителната деформация $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ и Закона на Хук $\sigma = E \cdot \varepsilon$, се намира абсолютната линейна деформация :

$$\Delta l = \frac{N_x \cdot l}{E \cdot F} \quad (7.8)$$

Произведението $E \cdot F$ се нарича деформационен модул или коравина. Коравината характеризира способността на материала да се съпротивлява на деформирането при опън и натиск.

Ако напречното сечение и надлъжната сила не са постоянни абсолютното удължение се определя чрез зависимост:

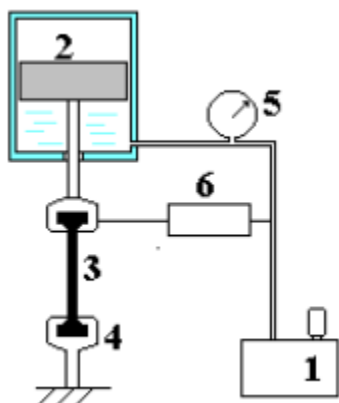
$$\Delta l = \int_0^L \frac{N_x(x)}{E \cdot F(x)} dx \quad (7.9)$$

7.1.5. Изпитване на опън. Механични характеристики на материалите.

Изпитването на опън е основно изпитване на повечето материали – стомани, пластмаси, дървесина, текстил и други. За всеки материал има разработени стандарти, където са описани основните правила на изпитването..

Машини за изпитване

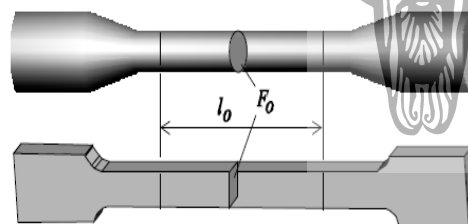
Фиг.7.3



За изпитването на опън се използват специални машини от лостов, винтов или хидравличен тип. На фиг. 7.3 е показана примерна схема на хидравлична машина. Тя има хидростанция (1), която нагнетява масло под налягане в хидравличния цилиндър (2). Образецът (3), който се изпитва, се захваща в специални челюсти (4) с механично или хидравлично захващащо устройство. По време на изпитването долната челюст остава неподвижна, а горната се опъва от гидроцилиндъра. По големината на създаденото налягане и диаметъра на цилиндъра може да се отчете приложената сила на опън. Това става автоматично на специална скала (5). Всяка машина има възможност да се записват стойностите на приложената сила и удължението на образца.



Образци за изпитване. За всеки материал се подготвят специални пробни тела образци (епруветки), формата и размерите на които се регламентират в съответен стандарт. Употребяват се два вида образци – с кръгло и с правоъгълно сечение .

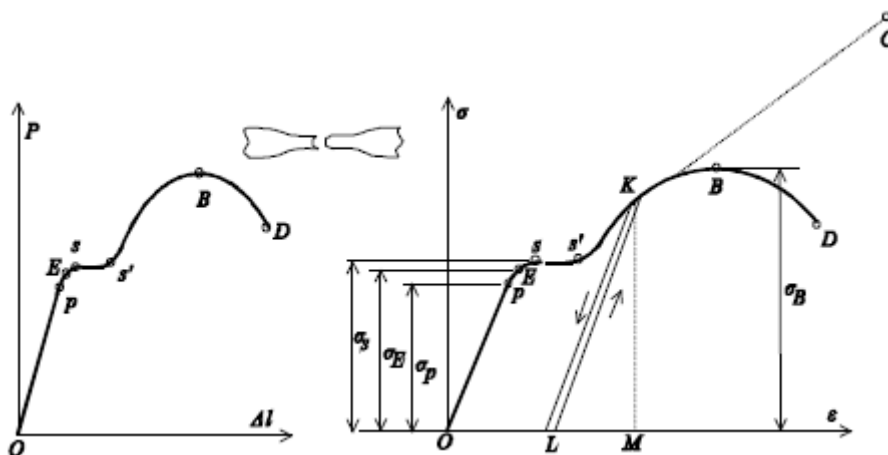


Определен проблем представлява начина на захващане на образеца към челюстите на машината.

Диаграми

При изпитване на нисковъглеродна стомана примерната зависимост между приложената сила на опън P и удължението Δl на образеца има вида, показан на фиг. 7.4.

Ако разделим приложената сила на началното напречно сечение F_0 , а измереното удължение Δl на началната дължина l_0 (отбелязва се на епруветката преди изпитанието), по ординатната ос ще получим напрежението σ , а по абсцисната ос – относителната деформация ε .

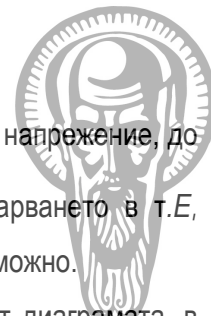


Фиг.7.4

В тези идеализирани диаграми са характерни няколко точки и области:

1. Най-голямото напрежение, до което зависимостта между напрежение и деформации е линейна -(т.Р), се нарича **граница на пропорционалност** и бележим с σ_p . В интервала OP е валиден закона на Хук $\sigma = E\varepsilon$.

Линейността между приложената сила и удължение се дължи на характера на междоатомните сили, зависещи от разстоянията между атомите.



2. В т.*E* се получава т.н. **граница на еластичност** - σ_E , която е най-голямото напрежение, до което в материала се получават само еластични деформации. Ако снемем натоварването в т.*E*, епруветката възвръща изцяло първоначалните си размери. След т.*E* това вече е невъзможно.

3. В т.*S* се получава т.н. **площадка на провлачване** на материала. Видно от диаграмата, в определен интервал удължението на образеца нараства без да се увеличава силата. Материалът започва да "тече". Напрежението в тази точка се нарича **граница на провлачване** σ_s .

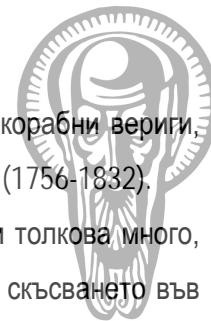
Площадката на провлачване не е еднаква за различните материали. За някои материали тя въобще липсва, затова за тях се приема **условна граница на провлачване** $\sigma_{0,2}$, която представлява напрежението, при което се получава остатъчна относителна линейна деформация 0,2 %.

Площадката на провлачване се дължи на несъвършенствата в кристалната структура на металите. Известно е, че в структурата на металите съществуват линейни дефекти **дислокации**, където регулярната нареденост на кристалите се нарушава. На тези места връзката между атомите е по-слаба. При нарастване на силите на опън става преплъзване по определени равнини на кристалната решетка, които сключват ъгъл около 45 градуса с оста на пръта. В тези равнини действат максималните напрежения на срязване. При добре шлифована плоска епруветка тези линии могат да се забележат върху епруветката с просто око. Тези ивици се наричат **ивици на Людерс-Чернов**, открити от тях независимо един от друг съответно през 1859 и 1884 г. Наличието на площадка на провлачване в металите определя техните пластични свойства и възможността за пластична обработка в студено състояние – изтегляне, щанцоване, огъване и др.

След т.*S'* в структурата на метала е извършено преподреждане на атомите. Напреженията нарастват отново. Зоната *S'B* се нарича **зона на уякчаване** на материала.

В зоната на уякчаване се наблюдава интересно свойство. Ако в т.*K* снемем натоварването, то разтоварването става по правата *KL*, успоредна на правата *OP*, където е валиден закона на Хук. Еластичната деформация е отсечката *LM*, а отсечката *OL* съответства на пластична, необратима деформация.

Ако повторно натоварим образеца, (след като сме стигнали т.*K* и сме го разтоварили), то зависимостта между напрежението и деформацията се осъществява по правата *LK* (По-точното измерване показва, че линията *KL* при разтоварване и *LK* при натоварване оформят малка хистерезисна елипса). След достигане на т.*K*, зависимостта продължава по кривата *S'B*, както ако натоварването не е свалено. Но се вижда, че зоната на пропорционалност между напрежение и деформация на материала значително се е увеличила ($LK > OP$). Това явление се нарича **наклеп** и се



използува широко в практиката за повишаване на границата на пропорционалност – корабни вериги, арматурна тел и др. Явлението е било открито за пръв път през 1831 г. от **Ф. Херстнер** (1756-1832).

4. В т.В силата престава да расте. Разстоянията между атомите са нараснали толкова много, че силите на привличане са сведени до нула. Тук започва да се оформя мястото на скъсването във вид на **шийка**. Напречното сечение бързо изтънява и епруветката се скъсва в т.Д при сила, малко-по-малка от тази в т.В.

Налице са площадката на преплъзгване (в краищата - под 45° спрямо оста на епруветката) и площадката на разкъсване – в центъра на епруветката.

Напрежението в т.В се нарича **граница на разрушение** σ_B . Това е максималното напрежение, което материалът може да издържи. То се нарича **кратковременна якост на опън**.

От т.В до т.Д, диаграмата s - е носи условен характер, защото напречното сечение силно е намаляло.

Истинското напрежение в момента на скъсване ще получим, като разделим силата в т.Д на площта на шийката, получена след разрушението $\sigma_{ист} = P_D / F_{шийка}$.

Напреженията σ_p , σ_e , σ_s и σ_B се наричат **механични характеристики** на материалите и се привеждат в специализирани справочници.

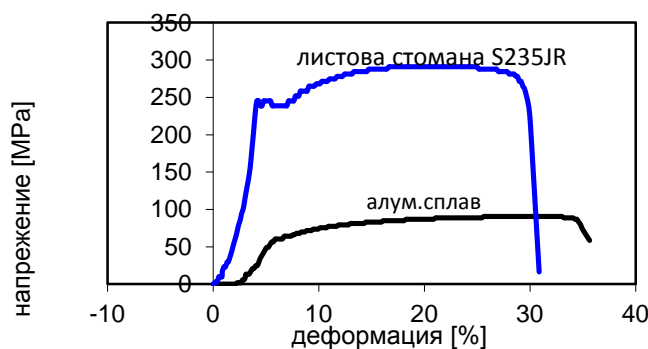
Всички изброени по-горе показатели са свързани с якостните свойства на материала. Деформационните му свойства се определят с т.н. **относително удължение при разрушение**, което се определя по израза:

$$\delta = \frac{\Delta l_D}{l_0} \cdot 100 \% \quad (7.10)$$

където l_0 – работна дължина на епруветката, Δl_D – удължение на епруветката след скъсването.

Освен относителното удължение, дефинира се и **относително напречно свиване**, което се изчислява по израза:

$$Z = \frac{F_{ш} - F_0}{F_0} \cdot 100 \% \quad (7.11)$$



Фиг.7.5.



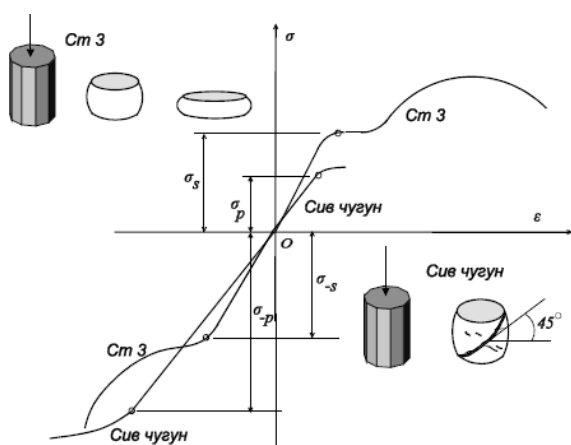
7.1.6. Понятие за жилавост и крехкост

Жилавост е свойството на материала да поема големи деформации без да се разрушава или да се разрушава при голямо относително удължение – повече от 20 %. Такива материали са алуминиеви сплави, нисковъглеродни стомани и др. Крехкост е свойството на материала да се разрушава при малки деформации. За крехки материали се приемат чугун, високовъглеродни стомани, стъкло, керамика и др.

Жилавостта и крехкостта са свързани не само с материала, а и с условията на експлоатация. При определени условия един и същ материал може да се разруши като жилав, а при други условия – като крехък. Затова се говори за жилаво и крехко разрушение.

При експлоатация якостните характеристики на материала натоварените детайли трябва да бъдат проверявани експериментално чрез разрушителни и безразрушителни методи.

7.1.7. Изпитване на натиск



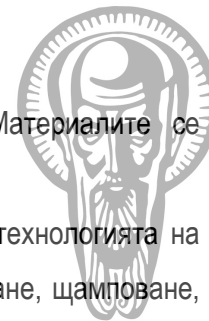
Фиг.7.6

Жилавият материал не се разрушава, а се сплесква, докато крехкият материал се разрушава по площадката с максимални тангенциални напрежения, която сключва с оста на епруветката ъгъл 45 градуса. Диаграмите на опън-натиск на жилавия материал до границата на провлачване са симетрични (напреженията при опън и натиск са равни по модул).

За крехките материали диаграмите на опън и натиск са несиметрични. Крехкият материал се съпротивлява на натиск много по-добре, отколкото на опън. Границата на разрушение при натиск за чугун е 500-1500 MPa, а при опън – 120-380 MPa. Поради тази причина крехките материали се употребяват за детайли и елементи, натоварени главно на натиск.

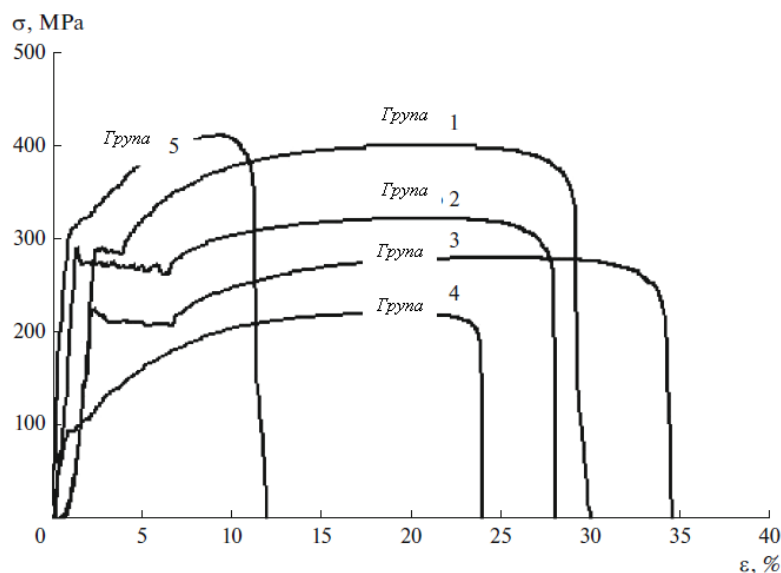
7.1.8. Влияние на различни фактори върху механичните характеристики на материалите

Температурата е един от основните фактори, който влияе върху механичните характеристики на материалите. Изложените по-горе данни за съпротивлението на материалите при опън - натиск се отнасят за т.н. стайна температура. Много детайли обаче работят при високи температури (двигатели с вътрешно горене, газови и парни турбини), а някои конструкционни елементи работят при ниски температури. При тях се наблюдава крехко разрушаване.



Освен това някои детайли се товарят статично, а други динамично. Материалите се съпротивляват по различен начин при бавно и бързо деформиране.

Друг фактор, който влияе върху механичните показатели на материалите е технологията на обработка на материалите: коване, леене, валцоване, изтегляне, пресоване, заваряване, шамповане, рязане и др. Силно влияние върху тези показатели оказва и различните видове термична обработка: закаляване, отгряване, отвързване, стареене и др. (фиг. 7.7)



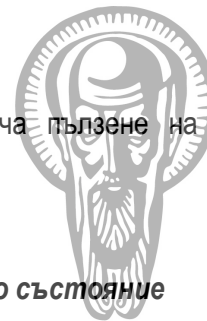
Фиг.7.7. Механични свойства на образци от стомана S235JR след термична обработка [11].

Таблица 7.1. Пояснение към фиг.7.7 [11]

Група	Термична обработка	Аустенитизация, $T_a, ^\circ\text{C}$	Охлаждане	Продължителност, h	Микроструктура	σ_s MPa	σ_B MPa	$\delta, \%$
1	-	-	-	-	Ферито-перлитна	300	412	30
2	Нормализация	800	въздух	1	Ферито-перлитна	280	335	30
3	Отгряване	950	в пещ	2	Ферито-перлитна	190	289	33
4	Нагряване	1100	в пещ	2	Ферито-перлитна	100	233	28
5	Закаляване	850	в пещ	1	Мартензитна	305	424	14

Под въздействието на радиационно облъчване металите и техните сплави променят якостните си характеристики. Корпусът на всеки ядрен реактор е подложен на интензивно неутронно облъчване при висока температура и налягане, което променя механичните свойства -предизвиква увеличаване на якостта, крехкостта и намаляване на пластичността и жилавостта. Увеличаването на крехкостта е известно като "радиационно окрехкостяване" [12].

Продължителността на натоварването е също важен фактор върху поведението на материалите. С течение на времето се оказва, че в една конструкция могат да се променят както



деформациите, така и напреженията. Това поведение на материалите се нарича *пълзене на материалите* [13].

7.1.9. Опасно състояние на материалите в условията на едномерно напрегнато състояние

При оразмеряване на конструкционните елементи се приема, че опасното състояние в околността на точка от тях се достига, ако напрежението σ_x за жилаво-пластичните материали се изравни с границата на провлачване, т.е. $\sigma_{\text{опасно}} = \sigma_s$ или $\sigma_{\text{опасно}} = \sigma_{02}$

За различните конструкционни материали опасното напрежение се задава като характеристика на материала.

За крехките материали се приема, че опасното състояние за материала се достига, когато σ_x се изравни с границата на разрушаване:

$$\sigma_{\text{опасно}} = \sigma_B \text{ при опън}$$

$$\sigma_{\text{опасно}} = \sigma_B \text{ при натиск.}$$

При експлоатация напреженията в точките на оразмерявания конструкционен елемент не трябва да достигат $\sigma_{\text{опасно}}$, поради което оразмеряването се извършва с определен коефициент на сигурност $n > 1$, с който се намалява стойността на $\sigma_{\text{опасно}}$ до определена допустима стойност $\sigma_{\text{доп}}$, наречена допустимо напрежение:

$$\sigma_{\text{опасно}} = \sigma_{\text{доп}} / n. \quad (7.12)$$

Коефициентът на сигурност n зависи от вида на материала. За жилаво-пластичните материали той има стойности, по-малки от тези при оразмеряване на крехки материали. Това се дължи на разликата в процеса на разрушаване на двата вида материали. При жилаво-пластичните материали то настъпва след значителни пластични деформации, съпроводени с уякчаване на материала, което осигурява известен запас в сигурността на оразмерявания конструкционен елемент, докато при крехките материали с достигането на $\sigma_{\text{опасно}}$ веднага настъпва разрушаване.

Коефициентът на сигурност n зависи от предназначението и сигурността на конструкционните елементи, както и от преценка за реализация на икономии.

7.1.10. Якостно и деформационно условие при опън и натиск

$$\sigma_{\text{max}} \leq \sigma_{\text{доп}} \quad (7.13)$$

Напречното сечение, в което възникват максимални напрежения се нарича *застрашено (опасно) сечение*.



(7.14)

Решават се следните задачи:

1. Проектно изчисление (оразмеряване)

$$F \geq \frac{N}{\sigma_{\text{доп}}}$$

2. Проверка на напреженията

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N}{F} \leq \sigma_{\text{доп}} \quad (7.15)$$

3. Определяне на допустимото натоварване

$$N \leq F \cdot \sigma_{\text{доп}} \quad (7.16)$$

4. Деформационно условие

$$\Delta l \leq \Delta l_{\text{доп}} \quad (7.17)$$

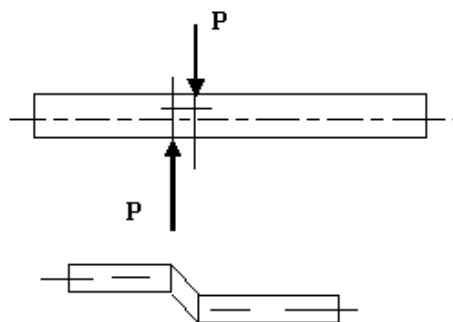
7.2. Плъзгане

7.2.1. Основни понятия

Чисто плъзгане (срязване) е налице, когато под действие на външните сили 2 безкрайно близки напречни сечения се стремят да се плъзнат едно спрямо друго, като запазват своята успоредност.

Най-често срязването се реализира от прилагането на две взаимно противоположни и равни по големина напречни сили, действащи много близо една до друга върху пръта. Такива примери са ножиците, гилотината и щанците. Срязване може да възникне в заваръчните, болтовите, нитовите и щифтовите съединения.

Когато вътрешните усилия в напречното сечение на един прът се редуцират за центъра на тежестта му само на тангенциално усилие, се казва че сечението е подложено на чисто плъзгане (срязване).



Фиг.7.8

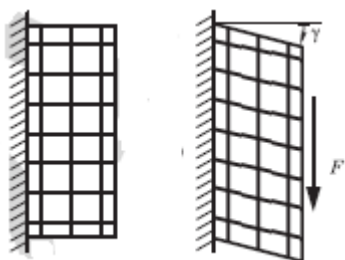


На фиг.7.8 е показан прав прът, върху който действат две равни по големина и противоположни сили, нормални спрямо оста му и на много близко разстояние една от друга.

В напречните сечения заключени между равнините AB $A'B'$ прътът е подложен срязване, при положение че разстоянието между направленията на двете сили клони към 0.

Ако напречните сили имат много малки рамена спрямо напречното сечение, което разглеждаме, то огъващият момент е много малък и можем да видим само ефекта от разрезното усилие Qz . Натоварване, при което напречните на оста на пръта сили създават тангенциално разрезно усилие, но огъващият момент е пренебрежимо малък, се нарича срязване.

7.2.2. Деформации



На фиг.7.9 е даден много къс прът с нанесена ортогонална мрежа по външната му повърхност.

При прилагане на напречна сила в свободния край на пръта той се деформира, както е показано на фиг. 7.9

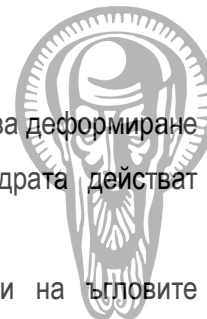
Фиг.7.9.

Ако материалът на пръта е много еластичен, например каучук, то показаният начин на деформиране може да се наблюдава.

Всички напречни прави линии остават прави след деформирането и на еднакво разстояние едни от други, като се изключи малък краев ефект, който може да се наблюдава в непосредствена близост до горната и долна повърхности и е свързан с тяхното изкривяване. Тези линии не променят наклона си, ако действително огъващият момент е незначителен. Надлъжните линии остават прави и на равни разстояния, но се наклоняват под един и същ ъгъл γ . Така първоначално перпендикулярните надлъжни и напречни линии стават коси, като ъгълът γ е ъгълът, с който се променя правият ъгъл между тях. **Ъгловата деформация** е техническа мярка за деформацията на телата, която представлява ъгъла на изменение между две взаимно перпендикулярни направления, прекарани в дадена точка от тялото. Ъгловата деформация е безразмерна величина и като мярка на ъгъл се определя в радиани (rad).

7.2.3. Напрежения и деформации при срязване

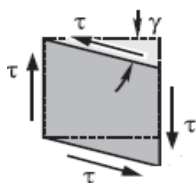
Разглеждаме едно елементарен квадрат от мрежата на елемента (фиг.7.8), подложен на срязване. След деформирането му неговите страни не се изменят по дължина и остават успоредни



(фиг. 7.10). Само правите ъгли на квадрата се изменят и той се превръща в ромб. Такова деформиране е възможно само ако по площадките (сеченията), очертаващи страните на квадрата действат тангенциални напрежения.

Опитно е установено, че тангенциалните напрежения са пропорционални на ъгловите деформации- закон на Хук при чисто плъзгане

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (7.18)$$



където G е модул на еластичност на ъгловите деформации (модул на еластичност от втори род). Основната мерна единица в система SI е Pa.

фиг.7.10

Модулът на еластичност на ъгловите деформации G е свързан с модула на еластичност на линейните деформации E и с коефициента на Поасон μ със следната зависимост:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (7.19)$$

За означаване на тангенциалните напрежения използваме два индекса: първия на нормалата на площадката, в която те действат, втория на направлението, по което действат. Същите са индексните означения на съответните ъглови деформации.

$$\tau_{xz} = \frac{Qz}{F} \quad (7.20)$$

Якостни условия при плъзгане

$$\tau = \frac{Qz}{F} \leq \tau_{\text{доп}} \quad (7.21)$$

$$\tau_{\text{доп}} = 0.75 \cdot \sigma_{\text{доп}} \text{ -крехки материали}$$

$$\tau_{\text{доп}} = 0.60 \cdot \sigma_{\text{доп}} \text{ -пластични материали}$$



8. Теория на напрегнатото състояние

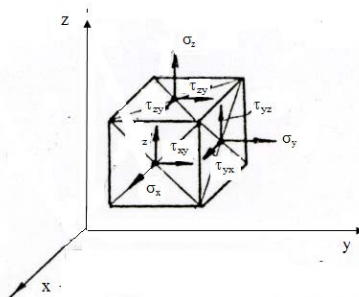
8.1. Видове напрегнати състояния

През всяка точка от тяло, намиращо се в напрегнато равновесие може да бъдат прекарани безкрайно много площадки, различно ориентирани в пространството. В най-общия случай нормалните и тангенциалните напрежения в тези площадки са различни.

Съвкупността от нормалните и тангенциалните напрежения, действащи по всички безкрайно много площадки, които може да се прекарат през дадена точка, се нарича напрегнато състояние в тази точка.

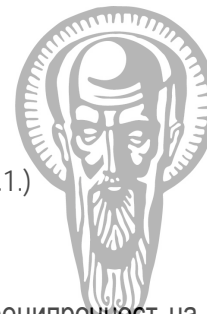
Доказва се, че напрегнатото състояние в дадена точка е зададено (т.е. можем да определим напрежението във всяка площадка, минаваща през тази точка), ако са известни напреженията в три произволно взети взаимно перпендикулярни площадки, минаващи през дадената точка. Казва се още, че това са изходни площадки и изходни напрежения.

В най-общия случай векторът на пълно напрежение на всяка изходна площадка може да се разложи на три съставлящи, успоредни на осите на координатната система. На фиг.8.1 е показан елементарен правоъгълен паралелепипед, съдържащ разглежданата точка. На фигурата са означени само напреженията върху видимите страни на разглеждания паралелепипед, намиращ се в напрегнато равновесие. Индексите на напреженията имат следното значение: първият индекс показва оста, успоредна на нормалата към площадката, а вторият – оста, която е успоредна на напрежението. При означение на нормалните напрежения един от двата индекса не се пише, т.е. вместо σ_{xx} се пише σ_x .



Фиг.8.1

Прието е напреженията, определящи напълно напрегнатото състояние в дадена точка, да се записват във формата на матрица:



$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

(8.1.)

От деветте съставлящи независими са само шест, тъй като е в сила т.нар. закон за реципрочност на тангенциалните напрежения (виж. 8.2), според който

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx} ; \tau_{xz} = -\tau_{zx} ; \tau_{yz} = -\tau_{zy} . \quad (8.2.)$$

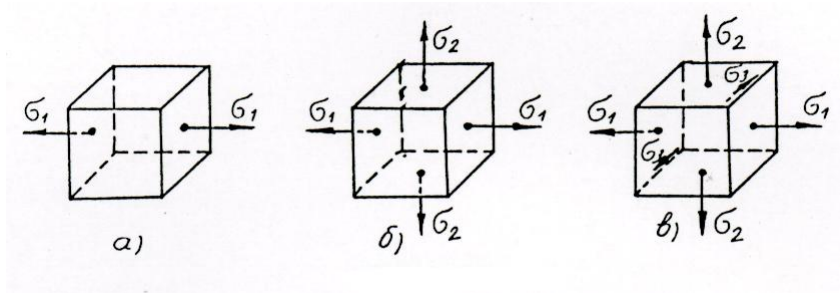
Нормалните напрежения σ се приемат за положителни, ако са насочени по външната нормала на разглежданата площадка, т.е. те са опънови. Тангенциалните напрежения τ се приемат за положителни, ако посоките им съвпадат с положителната посока на съответната ос, при положение, че нормалата към площадката съвпада с положителната посока на координатната ос.

От безбройно многото площадки, които може да се прекарат през дадената точка, има три взаимно перпендикулярни площадки, в които липсват тангенциални напрежения. Тези площадки се наричат главни площадки, а действащите в тях нормални напрежения – главни нормални напрежения σ_1, σ_2 и σ_3 . Приема се най-голямото измежду трите главни напрежения по алгебрична стойност да бъде σ_1 , следващото σ_2 , а най-малкото да бъде σ_3 , т.е.

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 . \quad (8.3.)$$

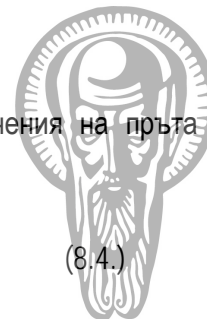
В зависимост от външното натоварване, съществуват три вида напрегнати състояния:

1. Едномерно (линейно) – когато две от главните нормални напрежения са нули (фиг.8.2а).
2. Двумерно (равнинно) – когато едно от главните нормални напрежения са нула (фиг.8.2б)
3. Триммерно (обемно) – когато трите главни нормални напрежения са отлични от нула (фиг.8.2в)



Фиг.8.2

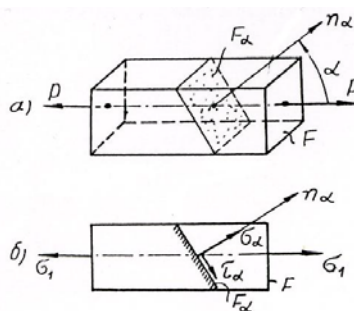
8.2. Едномерно (линейно) напрегнато състояние



Да разгледаме прът подложен на чист опън (фиг.8.3а). В напречните сечения на пръта напреженията се разпределят равномерно и се определят от израза:

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F} \quad (8.4.)$$

Тангенциалните напрежения в напречните сечения са нули. Следователно тези сечения се явяват главни площадки, а съответното напрежение- главно нормално напрежение $\sigma_1 = \sigma$. На фиг.8.3б е изобразен прътът в изглед, като вместо външните сили са поставени като вектори главните нормални напрежения σ_1 , насочени по външните нормали на крайните сечения.



Фиг.8.3

Представлява интерес определянето на напреженията в произволно наклонено сечение с нормала n_α , сключваща ъгъл α с направлението на σ_1 . Означаваме с F – лицето на напречното сечение, перпендикулярно на оста на пръта и с F_α - лицето на наклоненото сечение с нормала n_α , при което

$$F_\alpha = \frac{F}{\cos \alpha} \quad (8.5.)$$

В най-общия случай в наклоненото сечение може да действат нормални напрежения σ_α и тангенциални напрежения τ_α . Техните стойности се определят от условието за равновесие на лявата отрязана част (фиг.8.3б). Чрез проектиране на силите:

- по направление σ_α на и вземайки пред вид уравнение (8.5.)се получава:

$$\sigma_\alpha F_\alpha - \sigma_1 F \cos \alpha = 0,$$

откъдето

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \quad (8.6.)$$

- по направление на τ_α .се получава:



$$\tau_{\alpha} F_{\alpha} - \sigma_1 F \sin \alpha = 0,$$

откъдето
$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha .$$

При получаване на уравненията (8.6.) и (8.7.) трябва да се съблюдават следните правила за знаците на α , σ_{α} и τ_{α} :

Ъгълът α е положителен, когато нормалата n_{α} е завъртяна в равнината на чертежа спрямо направлението на главното нормално напрежение (оста x) в посока обратна на въртенето на часовниковата стрелка.

Нормалното напрежение σ_{α} е положително, когато посоката му съвпада с посоката на нормалата n_{α} .

Тангенциалното напрежение τ_{α} е положително, когато след завъртане на 90° в равнината на чертежа в посока обратна на въртенето на часовниковата стрелка съвпада с посоката на нормалата n_{α} .

От уравненията (8.6.) и (8.7.) следва, че при $\alpha = 0$ $\tau_{\alpha} = 0$ и $\sigma_{\alpha} = \sigma_1$ При $\alpha = \pi/2$ се получава $\tau_{\alpha} = 0$ и $\sigma_{\alpha} = 0$, което означава, че в площадки успоредни на оста на пръта нормалните и тангенциалните напрежения са нули. По такъв начин при чист опън (натиск) във всяка точка на пръта главните площадки са перпендикулярни и успоредни на неговата ос, а главните напрежения са съответно равни:

- при опън:
$$\sigma_1 = \sigma = \frac{N}{F} ; \sigma_2 = \sigma_3 = 0 ;$$

- при натиск:
$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 ; \sigma_3 = -\sigma .$$

От уравнение (8.7.) следва, че максималното тангенциално напрежение е

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}, \tag{8.8.}$$

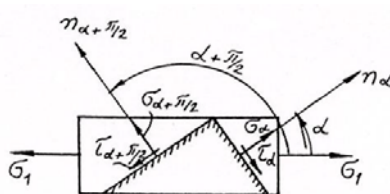
което действа в сечение, наклонено под ъгъл 45° спрямо главното сечение.

Да определим нормалното и тангенциалното напрежение в две взаимно перпендикулярни площадки с нормали n_{α} и $n_{\alpha + \pi/2}$ (фиг.8.4). За площадката с нормала n_{α} важат уравнения (8.6.) и (8.7.). За взаимно перпендикулярната площадка с нормала $n_{\alpha + \pi/2}$ нормалното и тангенциалното напрежение могат да се определят непосредствено от условията за равновесие на лявата и дясната част на разглеждания елемент или от уравнения (8.6.) и (8.7.) чрез заменяне на α с $\alpha + \pi/2$.

Използвайки уравненията (8.6.) и (8.7.) се получава:

$$\sigma_{\alpha+\pi/2} = \sigma_1 \cos^2(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \sigma_1 \sin^2 \alpha , \tag{8.9.}$$

$$\tau_{\alpha+\pi/2} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha . \tag{8.10.}$$



Фиг.8.4

Анализирайки получените резултати се вижда, че:

1. Сборът от нормалните напрежения в две взаимно перпендикулярни площадки е постоянен и равен на главното нормално напрежение, т.е.

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+\pi/2} = \sigma_1. \quad (8.11.)$$

2. В две взаимно перпендикулярни площадки действат равни по големина и противоположни по знак тангенциални напрежения, т.е.

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\alpha+\pi/2}. \quad (8.12.)$$

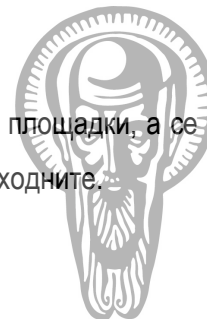
Това равенство е известно под наименованието закон за реципрочност на тангенциалните напрежения, който е валиден както за едномерно, така и за всяко друго напрегнато състояние (двумерно и тримерно).

8.3. Двумерно (равнинно) напрегнато състояние

При изследване на напрегнатото състояние на различни елементи (плочи, греди, валове, резервоари и др.) най-често се среща двумерното напрегнато състояние, при което едно от главните нормални напрежения е нула. Обикновено около изследваната точка се изрязва елементарен правоъгълен паралелепипед с дължина на ръбовете dx , dy и dz , който се чертае като правоъгълник със страни dx и dy . Приема се, че в площадката от равнината xy няма никакви напрежения.

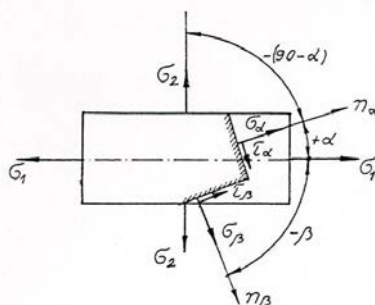
Всички определения и правила, изведени при едномерно напрегнато състояние, важат и за двумерното напрегнато състояние. Тук се срещат следните два вида задачи:

Права задача, при която са известни двете главни нормални напрежения, а се търсят напреженията в две взаимно перпендикулярни площадки с нормали n_{α} и n_{β} , при което $\alpha + \pi/2 = \beta$. Положението на тези площадки се определя от ъгъла α , който сключва нормалата n_{α} с направлението на по-голямото от двете нормални напрежения.



Обратна задача, при която са известни напреженията в две взаимно перпендикулярни площадки, а се търсят главните нормални напрежения и положението на главните площадки спрямо изходните.

а) Аналитично изследване на двумерно напрегнато състояние



фиг.8.5

1. Права задача. На фиг.8.5 е показан елемент, страните на който са главни площадки, а съответните напрежения в тях – главни нормални напрежения, при което $\sigma_1 > \sigma_2$. Третото главно напрежение с направление перпендикулярно на плоскостта на чертежа е нула.

Най-напред да определим напреженията в площадка с нормала n_α , сключваща положителен ъгъл α с направлението на главното нормално напрежение σ_1 (вж. фиг.8.5). Търсените напрежения в тази площадка σ_α и τ_α са предизвикани от едновременното действие на главните нормални напрежения σ_1 и σ_2 . Чрез прилагане на принципа на суперпозицията, т.е. разглеждане на даденото двумерно напрегнато състояние като сбор от две едномерни напрегнати състояния, може да се напише

$$\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha, \quad (8.13.)$$

$$\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha, \quad (8.14.)$$

където σ'_α и τ'_α са напреженията, предизвикани от действието на σ_1 ;

σ''_α и τ''_α напреженията, предизвикани от действието на σ_2 .

Определянето на σ'_α и τ'_α става непосредствено от уравнения (8.6.) и (8.7.):

$$\sigma'_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha,$$

$$\tau'_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

Като се има пред вид, че нормалата n_α сключва с направлението на σ_2 ъгъл $-(90^\circ - \alpha)$, който е отрицателен, напреженията σ''_α и τ''_α се определят също от уравнения (8.6.) и (8.7.), както следва:

$$\sigma''_\alpha = \sigma_2 \cos^2 (-(90^\circ - \alpha)) = \sigma_2 \sin^2 \alpha,$$



$$\tau_{\alpha}'' = \frac{\sigma_2}{2} \sin 2(-90^\circ - \alpha) = -\frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha .$$

Тъй като върху разглеждания елемент действат едновременно и двете главни нормални напрежения, то съгласно уравнения (8.13.) и (8.14.) се получава:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha , \quad (8.15.)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha . \quad (8.16.)$$

За определяне напреженията в площадка, имаща нормала n_{β} се използват зависимостите (8.15.) и (8.16.), като в тях ъгъл α се замества с ъгъл $\beta = 90^\circ - \alpha$, който е отрицателен (виж. фиг.8.5). Тогава

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha , \quad (8.17.)$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha . \quad (8.18.)$$

Съвкупността от уравненията (8.15.), (8.16.), (8.17.) и (8.18.) дава възможност за определяне на напреженията в две произволни взаимно перпендикулярни площадки при известни главни нормални напрежения.

Събирайки левите и десните страни на уравнения (8.15.) и (8.17.) се вижда, че

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 = const , \quad (8.19.)$$

т.е. сумата от нормалните напрежения в две взаимно перпендикулярни площадки е равна на сбора от главните нормални напрежения.

От уравнения (8.16.) и (8.18.) следва, че:

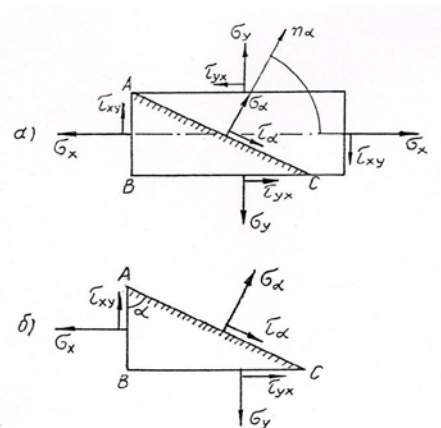
$$\tau_{\alpha} = \tau_{\beta} , \quad (8.20.)$$

т.е. тангенциалните напрежения в две взаимно перпендикулярни площадки са равни по големина, но имат противоположни знаци (в сила е закона за реципрочност на тангенциалните напрежения).

От уравнения (8.16.) и (8.18.) се вижда, че както при едномерното напрегнато състояние, така и тук максималното тангенциално напрежение се явява в площадка сключваща ъгъл 45° спрямо главните площадки и има стойност

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} . \quad (8.21.)$$

2. Обратна задача. При известни нормални и тангенциални напрежения, действащи по две взаимно перпендикулярни площадки (фиг.8.6а) се търсят главните напрежения и положението на главните площадки спрямо изходните.



Фиг.3.6

Първо се определят нормалното (σ_α) и тангенциалното (τ_α) напрежение за площадка с нормала n_α , сключваща с напрежението σ_x положителен ъгъл α . За целта разглеждаме равновесието на триъгълна призма ABC (фиг.8.6б). Ако лицето на наклонената стена на призмата означим с dF , то лицето на вертикалната стена (AB) ще бъде $dF \cos \alpha$, а лицето на хоризонталната стена (BC) – $dF \sin \alpha$.

Проектирайки всички действащи сили:

- по направление на σ_α , се получава

$$\sigma_\alpha dF - (\sigma_x dF \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_{xy} dF \cos \alpha) \sin \alpha + (\tau_{yx} dF \sin \alpha) \cos \alpha + (\sigma_y dF \sin \alpha) \sin \alpha = 0;$$

- по направление на τ_α , се получава

$$\tau_\alpha dF - (\sigma_x dF \cos \alpha) \sin \alpha + (\tau_{xy} dF \cos \alpha) \cos \alpha + (\tau_{yx} dF \sin \alpha) \sin \alpha + (\sigma_y dF \sin \alpha) \cos \alpha = 0.$$

След елементарни преобразувания (разделяне на dF , вземане пред вид, че $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$ и въвеждане на тригонометрични функции на удвоен ъгъл) се получават следните изрази:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha, \quad (8.22.)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (8.23.)$$

При изменение на наклона на площадката, както се вижда от уравнения (8.22.) и (8.23.), се изменят големините на нормалното и тангенциалното напрежение.

За да се определят положенията на главните площадки, т.е. площадките в които действат екстремални

нормални напрежения, е необходимо да се приравни на нула първата производна $\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0$, или да се



приравни на нула тангенциалното напрежение $\tau_\alpha = 0$, тъй като е известно, че в главните площадки няма тангенциални напрежения. И в двата случая се получава изразът

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}, \quad (8.24.)$$

където $\alpha = \alpha_1$ е ъгълът който сключва главната нормала n_1 с оста x . Другата главна нормала n_2 сключва с оста x ъгъл $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$.

След заместване на уравнение (8.24.) в уравнение (8.22.) и преобразувания се получава следната формула за определяне големината на главните нормални напрежения:

$$\sigma_{1,2} = \sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (8.25.)$$

Последните две уравнения (8.24.) и (8.25.) дават възможност да се реши аналитично обратната задача при двумерно напрегнато състояние.

Ако едно от изходните нормални напрежения е равно на нула (примерно σ_y), то уравнение (8.25.) се опростява и придобива вида:

$$\sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (8.26.)$$

Това уравнение намира широко приложение при огъване и сложна съпротива.

Чрез приравняване на нула на първата производна на тангенциалното напрежение $\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0$ се получават изрази за определяне на площадките, в които има максимално тангенциално напрежение, а именно:

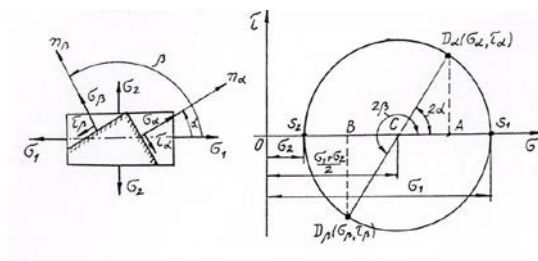
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}, \quad (8.27.)$$

$$\tau_{1,2} = \tau_{\max,\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (8.28.)$$

б) Графично изследване на двумерно напрегнато състояние

Разгледаните два основни типа задачи при двумерно напрегнато състояние могат да бъдат решени графично посредством окръжността на напреженията, наречена още окръжност на Мор, построена в координати с абциса σ и τ ордината.

На фиг.8.7 е показано графичното решение на правата задача при двумерно напрегнато състояние, посредством окръжността на Мор. Същността на това решение се състои в следното.



Фиг.8.7

По абсцисната ос, в известен мащаб, се нанасят дадените главни нормални напрежения σ_1 и σ_2 , при което се получават точките S_1 и S_2 . С център C $((\sigma_1 + \sigma_2)/2, 0)$ се описва окръжност с радиус $CS_1 = CS_2 = (\sigma_1 + \sigma_2)/2$, след което от него се прекарва лъч под ъгъл 2α до пресичането му с окръжността в точките D_α и D_β . Координатите на точка D_α представляват точно напреженията σ_α и τ_α (виж уравнения (8.15.) и (8.18.)) в площадката с нормала n_α , включваща положителен ъгъл α с главното нормално напрежение σ_1 :

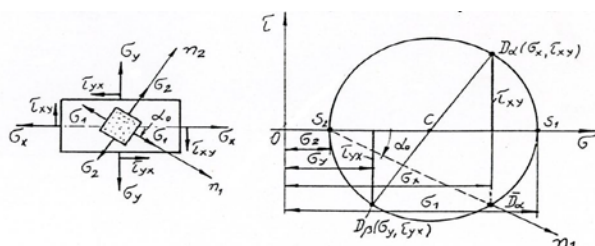
$$OA = OC + CD \cos 2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \equiv \sigma_\alpha,$$

$$AD_\alpha = CD_\alpha \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \equiv \tau_\alpha.$$

Лесно се доказва, че координатите на точката D_β представляват напреженията в площадката β , перпендикулярна на площадката α .

Точките D_α и D_β , характеризиращи напрежнатото състояние в две взаимно перпендикулярни площадки винаги лежат на краищата на диаметъра на окръжността. При изменение на ъгъла α в границите от -90° до $+90^\circ$ наклоните на площадки α и β заемат всички възможни положения, а точките D_α и D_β описват пълна окръжност.

На фиг.8.8 е показано графичното решение на обратната задача при двумерно напрежнато състояние. При известни напрежения в две взаимно перпендикулярни площадки σ_x, τ_{xy} и σ_y, τ_{yx} лесно се намират точките D_α и D_β . Пресечната точка на правата $D_\alpha D_\beta$ с оста σ е центърът C на окръжността, описана през точките D_α и D_β . Абсцисата на точката S_1 представлява главното нормално напрежение $\sigma_1 \equiv \sigma_{\max}$, а абсцисата на точката S_2 представлява главното нормално напрежение $\sigma_2 \equiv \sigma_{\min}$. Чрез съединяване на точката S_2 с точка $\overline{D_\alpha}$, която е симетрична на D_α спрямо оста σ се получава ъгълът α_0 , определящ нормалата на главната площадка n_1 .

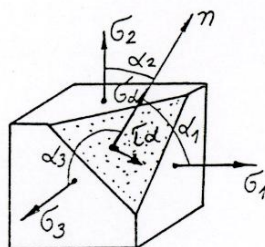


Фиг.8.8



8.4. Тримерно (обемно) напрегнато състояние

В механиката на деформируемото тяло много рядко се среща тримерно (обемно) напрегнато състояние, при което трите главни напрежения са различни от нула. Ето защо, тук ще разгледаме само някои основни моменти от теорията на тримерното напрегнато състояние.



Фиг.8.9.

При известни главни напрежения σ_1 , σ_2 и σ_3 (фиг.8.9) нормалното и тангенциалното напрежение в площадка с нормала n , сключваща ъгли α_1 , α_2 и α_3 с направлението на съответните главни нормални напрежения се определят от изразите:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \quad (8.29.)$$

$$\tau_{\alpha} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_{\alpha}^2}. \quad (8.30.)$$

При изследване на пластичните деформации, особен интерес представлява тангенциалното напрежение, действащо в прощадка равнонаклонена към трите главни напрежения, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Напреженията в такава площадка се наричат октаедрични, тъй като стените на октаедъра, получен от куба, върху чийто стени действат σ_1 , σ_2 и σ_3 , имат същото свойство, т.е. за всяка стена на октаедъра е валидно условието $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$.

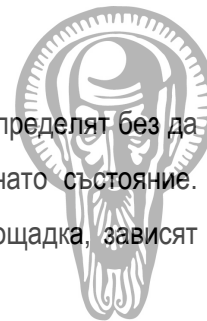
Имайки пред вид тригонометричната зависимост

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1,$$

при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ се получава $\cos^2 \alpha = 1/3$. От уравнение (8.29.) и (8.30.) се получават следните изрази за определяне на октаедричното нормално и тангенциално напрежение, а именно:

$$\sigma_{okt} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}; \quad (8.31.)$$

$$\tau_{okt} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (8.32.)$$



Напреженията в площадки, успоредни на едно от главните нормални напрежения, се определят без да се вземе под внимание това главно напрежение, т.е. както при двумерно напрегнато състояние. Например, ако площадката е успоредна на σ_3 , напреженията възникващи в тази площадка, зависят само от σ_1 и σ_2 и се определят от уравнения (8.15.) и (8.16.).

В най-общия случай на напрегнато състояние максималното и минималното тангенциално напрежение са равни съответно на максималното и минималното главни напрежения

$$\max \sigma_\alpha = \sigma_1 ; \quad \min \sigma_\alpha = \sigma_3 . \quad (8.33.)$$

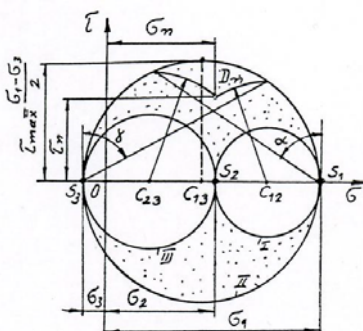
Максималното тангенциално напрежение възниква в площадка, наклонена под ъгъл 45° към направлението на σ_1 и σ_3 и е успоредно на σ_2 ,

$$\max \tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} . \quad (8.34.)$$

Тангенциалните напрежения, успоредни на σ_1 или σ_3 и наклонени под ъгъл 45° към останалите две главни напрежения, са съответно равни

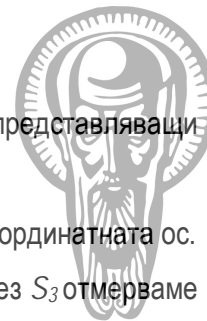
$$\tau_{2,3} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} ; \quad \tau_{1,3} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} .$$

Напреженията в площадка с нормала n , сключваща ъгли α_1 , α_2 и α_3 с главни напрежения σ_1 , σ_2 и σ_3 могат да бъдат определени графично, като се използват окръжностите на напреженията, наречени окръжности на Мор. За определеност приемаме, че $\sigma_1 > \sigma_2$ и $\sigma_3 < 0$. Извършват се следните графични построения (фиг.8.10)



фиг.8.10

а) Построяват се точките $S_1(\sigma_1, 0)$, $S_2(\sigma_2, 0)$ и $S_3(\sigma_3, 0)$, имащи за абциси главните нормални напрежения



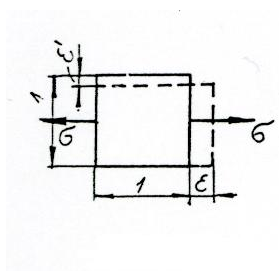
- б) Намираме точките C_{12} , C_{13} и C_{23} , като среди на отсечките $S_1 S_2$, $S_1 S_3$ и $S_2 S_3$, представляващи центрове на окръжностите на напреженията I, II и III.
- в) През най-дясната точка S_1 и през най-лявата точка S_3 издигаме прави, успоредни на ординатната ос.
- г) От правата през S_1 отмерваме ъгъл α_1 и построяваме хордата $S_1 D_1$, а от правата през S_3 отмерваме ъгъл α_3 и построяваме хордата $S_3 D_3$.
- д) От C_{12} описваме дъга през точката D_3 с радиус $C_{12}D_3$, а от C_{23} описваме дъга през точката D_1 с радиус $C_{23}D_1$. Координатите на пресечната точка D_n на двете дъги са търсените напрежения σ_n и τ_n .

8.5. Зависимост между деформациите и напреженията. Обобщен закон на Хук

В механиката на непрекъснати среди връзката между тензора на напрежения и тензора на деформации е сложна и нарича общ закон на Хук. Матрицата, която преобразува тензора на напрежения в тензор на деформации отразява еластичните свойства на материала.

В техническата механика се приема, че материалите са изотропни и тогава $\sigma = E \cdot \varepsilon$ и $\tau = G \cdot \gamma$

Нека разгледаме един елемент, изрязан от прът, подложен на чист опън, със страни равни на единица (фиг.8.11).



Фиг.8.11

Този елемент изпитва надлъжни и напречни деформации, предизвикани от действието на нормално напрежение σ , определени от изразите:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}; \quad (8.35.)$$

$$\varepsilon' = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}, \quad (8.36.)$$

където E е модул на линейната деформация ;

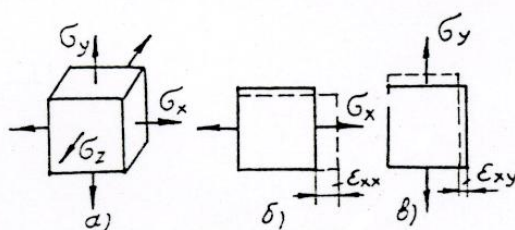
μ - коефициент на Поасон.

Уравнение (8.35.) изразява закона на Хук при едномерно (линейно) напрегнато състояние.

Ще разгледаме двумерно и тримерно напрегнато състояние. На фиг.8.12а е изобразен елемент от тяло, намиращо се в обемно напрегнато състояние, подложено на действието на нормалните



напряжения σ_x , σ_y и σ_z . Тангенциалните напряжения не са показани, тъй като при малки деформации те не изменят дължините на страните.



Фиг.8.12.

За определяне на деформациите ε_x , ε_y и ε_z , предизвикани от действието на нормалните напряжения σ_x , σ_y и σ_z , използваме принципа на независимостта на силите и уравненията (8.35.) и (8.36.). Общото относително удължение ε_x , съвпадащо с направлението на напряжението σ_x , може да се представи като сбор от три компоненти:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{xz}, \quad (8.37.)$$

където ε_{xx} е надлъжна деформация, предизвикана от действието на напряжението σ_x и се определя от уравнение (8.35.) (фиг.8.12б) ;

ε_{xy} - деформация, предизвикана от действието на напряжението σ_y . Тя е напречна деформация по отношение на σ_y (фиг.8.12в) и се определя от уравнение (8.36.) ;

ε_{xz} - деформация, предизвикана от σ_z .

Следователно,

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_z}{E}. \quad (8.38.)$$

Чрез аналогични разсъждения се определят ε_y и ε_z . Изразите,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)), \end{aligned} \quad (8.39.)$$

се наричат обобщен закон на Хук при обемно напрегнато състояние.

В тези уравнения опъновите напряжения се поставят със знак плюс, а натисковите – със знак минус.

За двумерно напрегнато състояние, законът на Хук се получава като в уравнение (8.39.) едно от напряженията се приравни към нула. Така например при $\sigma_x = 0$ имаме:

$$\varepsilon_x = -\frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z),$$



$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z),$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_y).$$

(8.40.)

При известни напрежения σ_y и σ_z от уравнение (8.40.) могат да се определят деформациите ε_y и ε_z .

В някои случаи е необходимо да имаме обратната зависимост. Умножавайки третия ред на уравнение (8.40.) с μ и събирайки с втория, се получава:

$$\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu^2\sigma_y).$$

Следователно напреженията σ_y и σ_z се определят от изразите:

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_z),$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_z + \mu\varepsilon_y). \quad (8.41.)$$

Уравнението за σ_z е написано чрез размяна на индексите в уравнението на σ_y .

Връзката между ъгловите деформации и тангенциалните напрежения се дава от изразите:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad (8.42.)$$

където G е модул на ъгловата деформация.

Главните деформации, т.е. относителните линейни деформации по направление на главните нормални напрежения се определят от изразите:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)), \quad (8.43.)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)).$$

Ъгловите деформации по главните направления са равни на нула.

Освен относителните линейни деформации, представлява интерес и така наречената относителна обемна деформация, която се определя от израза:

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV}, \quad (8.44.)$$

където dV_0 е първоначалният обем на тялото ;

dV - крайният обем на тялото.

При първоначален обем на тялото $dV_0 = dx dy dz$ крайният обем се определя от израза:



$$dV = (dx + \Delta dx)(dy + \Delta dy)(dz + \Delta dz),$$

или

$$dV = dV_0(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z).$$

Пренебрегвайки безкрайно малките множители от втори порядък, се получава:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (8.45.)$$

Вземайки под внимание обобщения закон на Хук (8.43.), за относителната обемна деформация се получава следния израз:

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (8.46.)$$

В частния случай, когато трите главни нормални напрежения са еднакви, т.е. $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, от уравнение (8.46.) следва:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma}{K}, \quad (8.47.)$$

$$\text{където } K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (8.48.)$$

се нарича модул на обемната деформация.

8.6. Потенциална енергия на деформацията при тримерно напрегнато състояние

Специфичната потенциална енергия, възникваща в елемент намиращ се в тримерно напрегнато състояние, се определя въз основа на принципа на суперпозицията, отнасящо се до специфичната потенциална енергия при едномерно напрегнато състояние, а именно:

$$\Omega = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (8.49.)$$

В уравнение (8.49.) първият член ($\sigma_1 \varepsilon_1 / 2$) е специфичната потенциална енергия, възникваща при условие, че върху елемента действа само σ_1 . Съответно $\sigma_2 \varepsilon_2 / 2$ – при условие, че действа само σ_2 и членът $\sigma_3 \varepsilon_3 / 2$ – при условие, че действа само σ_3 .

Замествайки в уравнение (8.49.) значенията на относителните линейни деформации ε_1 , ε_2 и ε_3 , от обобщения закон на Хук (8.43.) се получава:

$$\Omega = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)). \quad (8.50.)$$



Тази енергия се състои от две части

$$\Omega = \Omega_v + \Omega_f,$$

(8.51.)

където $\Omega_v = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$ е специфичната потенциална енергия на изменение

на обема ;

$\Omega_f = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$ - специфичната потенциална енергия на

изменение на формата.

Пълната специфична потенциална енергия на деформацията, изразена чрез съставлящите на напреженията, се определя от израза:

$$\Omega = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y)) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2). \quad (8.52.)$$

При едномерно напрегнато състояние се получават следните изрази за определяне на специфичната потенциална енергия:

$$\Omega = \frac{\sigma^2}{2E};$$

$$\Omega_v = \frac{1-2\mu}{6E}\sigma^2; \quad (8.53.)$$

$$\Omega_f = \frac{1+\mu}{3E}\sigma^2.$$



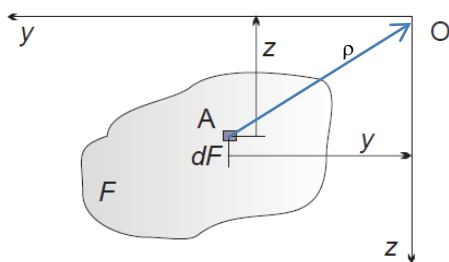
9. Геометрични характеристики на равнинни фигури

При разгледаните досега съпротиви на опън, натиск и срязване якостта на конструкционните материали зависи от напречните му размери, изразени чрез лицето.

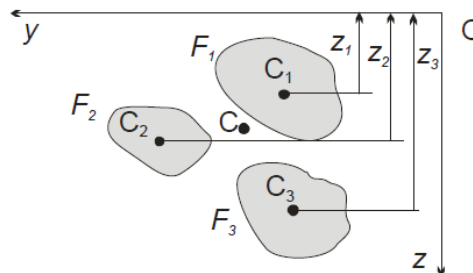
При съпротиви на усукване, огъване, изкълчване и сложна съпротива якостта и издържливостта на пръта (гредата) не зависи само от лицето на напречното сечение, но и неговата форма, изразена чрез различни геометрични характеристики: статичен момент, инерционни моменти, инерционни радиуси и др.

Напречните сечения представляват равнинни фигури. Геометричните характеристики на тези фигури участват във формулите за оразмеряване на конструкционните елементи. Всяка равнинна фигура може да се разглежда като съставена от множество елементарни фигури с лица dF . Първата геометрична характеристика на равнинна фигура е лицето ѝ F (фиг. 9.1):

$$F = \int_F dF \quad (9.1)$$



фиг. 9.1



фиг.9.2

За определяне на лицето на равнинна фигура със сложна форма тя се разделя на фигури с проста форма (триъгълници, правоъгълници и др.), на които лесно може да се определят лицата. Тогава лицето на сложната фигура се представя като сума от лицата на простите фигури. Ако в сложната фигура има 'празнини' се приема, че лицата на фигурите, ограничаващи празнините, са отрицателни.

9.1. Статични моменти. Център на тежестта

По дефиниция под статичен момент на една фигура спрямо дадена ос се разбира интегралната сума от произведенията на елементарните лица, съставляващи цялата фигура и разстоянията им до оста. Съгласно дефиницията, величините



$$S_y = \int_{(F)} z dF ,$$
$$S_z = \int_{(F)} y dF ,$$

(9.2)

представяват статичните моменти на фигурата спрямо осите y и z .

Измерението на статичния момент е m^3 , а знакът плюс или минус в зависимост от разположението на фигурата спрямо съответната ос.

При известни координати на центъра на тежестта на фигурата $C(y_C, z_C)$, статичните моменти се пресмятат с изразите (9.3.):

$$S_y = z_C F ,$$
$$S_z = y_C F .$$

(9.3)

От зависимостта (9.3.) следва, че статичните моменти спрямо оси, минаващи през центъра на тежестта на фигурата са равни на нула. Такива оси се наричат централни.

Статичен момент на сложна равнинна фигура

Ако дадена сложна фигура може да се представи като съставена от няколко прости фигури с лица F_1, F_2, \dots, F_n (фиг. 9.2), статичният момент на тази фигура спрямо ос, лежаща в равнината на фигурата и не минава през центъра на тежестта ѝ, е равен на сумата от статичните моменти на съответните моменти спрямо тази ос:

$$S_y = S_y(1) + S_y(2) + \dots + S_y(n)$$
$$S_z = S_z(1) + S_z(2) + \dots + S_z(n)$$

(9.4)

Известно е от теоретичната механика, че координатите на центъра на тежестта на сложна равнинна фигура (фиг.4.2), състояща се от съставни прости фигури, могат да се определят от изразите:

$$y_C = \frac{S_z}{F} = \frac{\sum_{i=1}^m y_i F_i}{\sum_{i=1}^m F_i} = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots + F_n y_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n},$$
$$z_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^m z_i F_i}{\sum_{i=1}^m F_i} = \frac{F_1 z_1 + F_2 z_2 + \dots + F_n z_n}{F_1 + F_2 + \dots + F_n},$$

(9.5)

където S_y и S_z и са статичните моменти на фигурата спрямо предварително избраните оси y и z ; F – лице на сложната фигура;



F_1, F_2, \dots, F_n – лица на съставните прости фигури;

$y_1, z_1, \dots, y_n, z_n$ – координати на центъра на тежестта на съставните прости фигури спрямо предварително избраните оси y и z .

9.2. Геометрични моменти от втори ред. Осов инерционен момент

По-долу ще бъдат дефинирани различните инерционни моменти, наречени геометрични, които намират приложение при изучаване напреженията и деформациите на пръти и греди, подложени на огъване, усукване и сложно натоварване, а също така и при изучаване устойчивостта на натиснати пръти.

Под осов инерционен момент (фиг.9.1) на една фигура спрямо дадена ос се разбира интегралната сума от произведенията на всички елементарни площи, съставлящи фигурата и квадрата от разстоянията им до оста. Следователно

$$\begin{aligned} J_y &= \int_{(F)} z^2 dF, \\ J_z &= \int_{(F)} y^2 dF. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Под полярен инерционен момент на една фигура спрямо дадена точка (наречена полюс) се разбира интегралната сума от произведенията на всички елементарни площи, съставлящи фигурата и разстоянията им до координатните оси. Следователно

$$J_C = \int_{(F)} \rho^2 dF. \quad (9.7)$$

Под центробежен момент на една фигура спрямо координатните оси y и z се разбира интегралната сума от произведенията на всички елементарни площи, съставлящи фигурата и разстоянията им до координатните оси. Следователно

$$J_{yz} = \int_{(F)} yz dF. \quad (9.8)$$

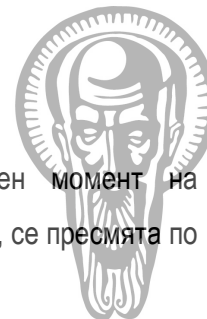
Една фигура, колкото и малка да е, има винаги полярен и осови инерционни моменти.

Измерението на центробежния момент е m^4 , а знакът е "+" или "-" в зависимост от разположението на фигурата спрямо остите y и z .

Като заместим в уравнение (9.7) $\rho^2 = z^2 + y^2$ (виж фиг.9.3), се получава

$$J_C = J_y + J_z. \quad (9.9)$$

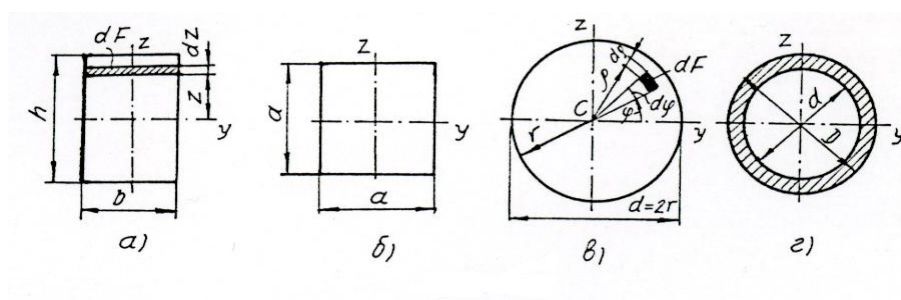
9.3. Пресмятане инерционните моменти на някои прости фигури



а) Правоъгълник (фиг.9.3.а). Съгласно дефиницията осовият инерционен момент на правоъгълник с основа b и височина h спрямо централната ос y , успоредна на основата, се пресмята по уравнение (9.10), както следва

$$J_y = \int_{(F)} z^2 dF = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = 2b \int_0^h z^2 dz = \frac{bh^3}{12}. \quad (9.10)$$

Аналогично се пресмята и $J_z = \frac{hb^3}{12}$.



Фиг.9.3

Следователно за правоъгълното напречно сечение осовите инерционни моменти спрямо централните оси се пресмятат от изразите

$$J_y = \frac{bh^3}{12},$$

$$J_z = \frac{hb^3}{12}. \quad (9.11)$$

б) Квадрат (фиг.9.3б). Осовите инерционни моменти на квадрат се получават от (9.11) чрез заместване $b=h=a$, а именно

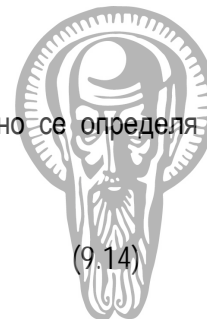
$$J_y = J_z = \frac{a^4}{12}. \quad (9.12)$$

в) Кръг (фиг.9.3в). От уравнение (9.7) определяме полярният инерционен момент на кръг с радиус r (диаметър $d=2r$) спрямо центъра му C , а именно

$$J_C = \int_{(F)} \rho^2 dF = \int_{(F)} \rho^2 \rho d\varphi d\rho = \int_0^r \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi r^4}{2}$$

Следователно

$$J_C = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4. \quad (9.13)$$



Като се вземе пред вид уравнение (9.9.) и обстоятелството, че $J_y = J_z$ лесно се определя осовият инерционен момент

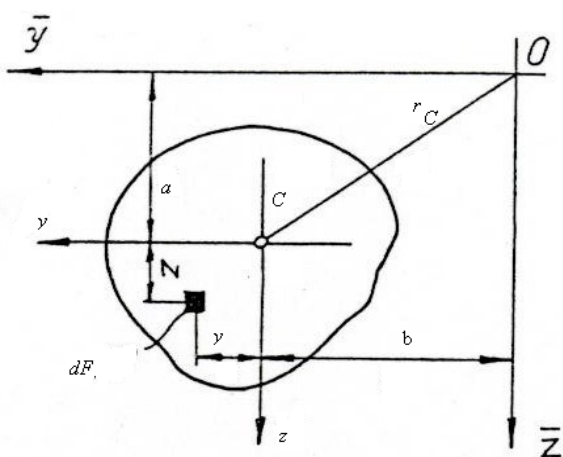
$$J_y = J_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} = 0,05d^4. \quad (9.14)$$

г) Пръстен (фиг.9.3г). Основният инерционен момент е равен на разликата между осовия инерционен момент на външния кръг с диаметър D и вътрешния кръг с диаметър d ,

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4). \quad (9.15.)$$

При отношение $\alpha = \frac{d}{D}$, се получава

$$J_y = J_z = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4). \quad (9.16.)$$



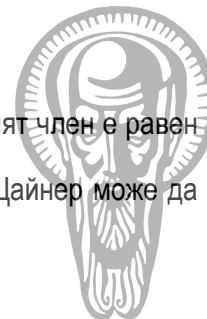
9.4.Зависимост между инерционните моменти спрямо успоредни оси

При известни геометрични моменти на една фигура спрямо централните и оси J_y , J_z , J_{yz} и J_C , геометричните моменти спрямо успоредните оси на централните \bar{y} , \bar{z} и O (фиг.9.4) могат да се определят с помощта на теоремите на Щайнер.

Фиг. 9.4.

Първа теорема: Осовият инерционен момент на една фигура спрямо дадена ос, успоредна на централната, е равен на осовия инерционен момент на фигурата спрямо централната ос плюс произведението от лицето на фигурата и квадрата от разстоянието между двете оси. От зависимост (9.4.) следва

$$J_{\bar{y}} = \int_{(F)} \bar{z}^2 dF = \int_{(F)} (z + a)^2 dF = \int_{(F)} z^2 dF + 2a \int_{(F)} z dF + a^2 \int_{(F)} dF .$$



Първият член на горното уравнение е централния инерционен момент J_y , вторият член е равен на нула, защото $\int_{(F)} z dF = S_y = 0$, а $\int_{(F)} dF = F$. Следователно първата теорема на Щайнер може да се запише така:

$$J_{\bar{y}} = J_y + a^2 F . \quad (9.17)$$

Аналогично е доказателството и спрямо другата ос,

$$J_{\bar{z}} = J_z + b^2 F . \quad (9.18)$$

Втора теорема: Центробежният момент на една фигура спрямо кои да са две оси е равен на центробежния момент спрямо успоредните на тях централни оси плюс произведението от лицето на фигурата и произведението от координатите на центъра на тежестта на фигурата.

От дефиниционната зависимост (9.8.) следва, че

$$J_{\bar{yz}} = \int_{(F)} \overline{yz} dF = \int_{(F)} (y+a)(z+b) dF = \int_{(F)} yz dF + ab \int_{(F)} dF + a \int_{(F)} y dF + b \int_{(F)} z dF .$$

Вземайки пред вид, че първият член на горното уравнение е центробежния момент спрямо централните оси J_{yz} , а третият и четвъртият са нули, се получава аналитичен израз на втората теорема на Щайнер

$$J_{\bar{yz}} = J_{yz} + abF . \quad (9.19)$$

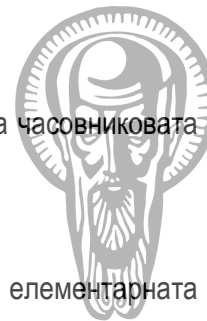
Трета теорема: Полярният инерционен момент на една фигура спрямо произволна точка от същата равнина е равен на полярния инерционен момент спрямо центъра на тежестта и плюс произведението от лицето на фигурата и квадрата на разстоянието между двете точки.

Ако сумираме двете уравнения (9.17) и (9.18) и вземем пред вид, че $a^2 + b^2 = \rho^2$, се получава аналитичния израз на третата теорема на Щайнер,

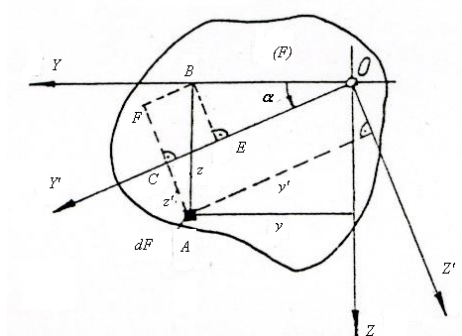
$$J_0 = J_c + \rho_c^2 F . \quad (9.20)$$

9.5. Зависимост между инерционните моменти спрямо завъртяни оси

Нека инерционните моменти на една фигура спрямо правоъгълна координатна система yOz са J_y , J_z и J_{yz} (фиг.9.5). При завъртане координатната система yOz на произволен ъгъл α , определяме големините на инерционните моменти на фигурата спрямо завъртяната координатна система $Y'OZ'$.



Приемаме, че $J_y > J_z$ и положителният ъгъл α се отчита по оста y в посока обратна на часовниковата стрелка.



От фиг.9.5 следва, че координатите на елементарната фигура с лице dF спрямо завъртаната координатна система се определят:

$$\begin{aligned} y' &= \overline{OC} = \overline{DE} + \overline{EC} = \overline{OE} + \overline{BF} = \\ &= \overline{OB} \cos \alpha + \overline{AB} \sin \alpha = y \cos \alpha + z \sin \alpha \\ z' &= \overline{AC} = \overline{AF} - \overline{BE} = z \cos \alpha - y \sin \alpha \end{aligned}$$

Фиг.9.5

Като имаме предвид дефиниционните зависимости (9.6.) и вземайки пред вид изразите за y' и z' , получаваме:

$$J_{y'} = \int_{(F)} z'^2 dF = \int_{(F)} (z \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 dF,$$

или
$$J_{y'} = J_y \cos^2 \alpha + J_z \sin^2 \alpha - J_{yz} \sin 2\alpha; \quad (9.21)$$

$$J_{z'} = \int_{(F)} y'^2 dF = \int_{(F)} (y \cos \alpha + z \sin \alpha)^2 dF;$$

или
$$J_{z'} = J_z \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha + J_{yz} \sin 2\alpha; \quad (9.22)$$

$$J_{y'z'} = \int_{(F)} y' z' dF = \int_{(F)} (y \cos \alpha + z \sin \alpha)(z \cos \alpha - y \sin \alpha) dF;$$

или
$$J_{y'z'} = \frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha + J_{yz} \cos 2\alpha. \quad (9.23)$$

Ако съберем почленно (9.21) и (9.22) и вземем пред вид (9.9.), получаваме

$$J_{y'} + J_{z'} = J_y + J_z = J_C, \quad (9.24)$$

което означава, че при завъртане на правоъгълна координатна система сумата от инерционните моменти не се изменя и е равна на полярния инерционен момент спрямо началото на координатната система.

При завъртане на координатната система на ъгъл $\alpha = 90^\circ$ се получават следните равенства:

$$J_{y'} = J_z; \quad J_{z'} = J_y; \quad J_{y'z'} = -J_{yz}.$$



9.6. Главни инерционни оси и моменти

От уравнение (9.21) се вижда, че големината на инерционния момент J_y зависи от ъгъла на наклона на оста. Ясно е, че може да се намери такава стойност на ъгъла α_0 , при която инерционния момент да има екстремум. За определяне на ъгъла α_0 е необходимо да се приравни на нула първата производна и се положи $\alpha = \alpha_0$:

$$\frac{dJ_{y'}}{d\alpha} = 0 ; \quad -2J_y \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2J_z \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2J_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0 ,$$

или
$$(J_y - J_z) \sin 2\alpha_0 + 2J_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0 ,$$

откъдето
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{yz}}{J_y - J_z} . \quad (9.25)$$

Решението на уравнение (9.25) дава две стойности за ъгъла α_0 и $\alpha_0 + 90^\circ$. Следователно съществуват две взаимно перпендикулярни оси, спрямо които инерционният момент има екстремни стойности. Тези оси се наричат главни инерционни оси, а моментите спрямо тях – главни инерционни моменти.

Изследвайки втората производна $\frac{d^2 J_{y'}}{d\alpha^2}$ се установява, че за дадения случай ($J_y > J_z$) спрямо оста y се получава максимален инерционен момент J_{max} , а спрямо другата перпендикулярна ос се получава – минимален инерционен момент J_{min} .

След несложни преобразувания се получава следната формула за определяне на главните инерционни моменти

$$J_{\min}^{\max} = \frac{J_1 + J_2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_z)^2 + 4J_{yz}^2} . \quad (9.24)$$

Центробежният момент спрямо главните оси е равен на нула, което се вижда от приравняването на нула на уравнението (4.20.),

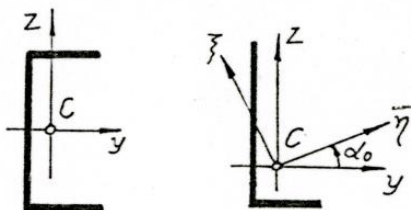
$$\frac{J_y - J_z}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{yz} \cos 2\alpha_0 = 0 ,$$

откъдето за $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ се получава уравнение (9.25).

Практическо значение имат главните оси, минаващи през центъра на тежестта на фигурата. Те се наричат главни централни инерционни оси, а инерционните моменти спрямо тях – главни централни инерционни моменти (обикновено “централни” се изпуска). При симетрични сечения или такива с една ос на симетрия главните централни оси се означават с y и z , а при несиметрични сечения – с η и ζ .



фиг.9.6



Ако една фигура има ос на симетрия, то непременно тя е главна инерционна ос, защото центробежният момент е равен на нула, а другата главна инерционна ос е перпендикулярна на нея и минава през центъра на тежестта на фигурата.

9.7. Инерционни моменти на сложни фигури

В практиката често се налага да се определят инерционните моменти на сечения, съставени от няколко прости фигури (правоъгълник, квадрат, кръг и триъгълник), за които има формули за определяне на инерционните моменти. Трябва да се има пред вид, че в якостните пресмятания взимат участие главните инерционни моменти на сеченията.

От свойството на определения интеграл следва, че инерционният момент на една сложна фигура спрямо дадена ос е равен на сумата от инерционните моменти на образуващите я части спрямо същата ос, т.е.

$$J_y = \int_{(F)} z^2 dF = \int_{(F_1)} z^2 dF + \int_{(F_2)} z^2 dF + \dots + \int_{(F_n)} z^2 dF ,$$

или
$$J_y = J_y^{(1)} + J_y^{(2)} + J_y^{(3)} + \dots + J_y^{(n)} ; \quad (9.25)$$

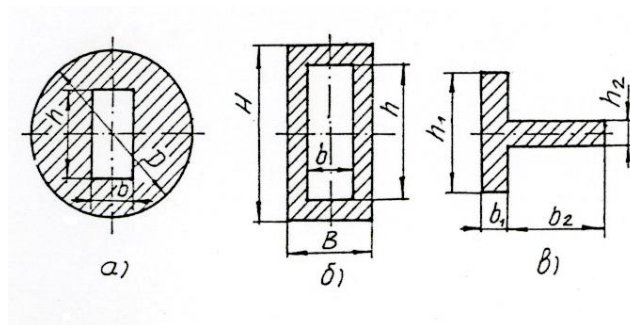
$$J_z = \int_{(F)} y^2 dF = \int_{(F_1)} y^2 dF + \int_{(F_2)} y^2 dF + \dots + \int_{(F_n)} y^2 dF ,$$

или
$$J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)} + J_z^{(3)} + \dots + J_z^{(n)} . \quad (9.26)$$

Аналогична зависимост е валидна и за центробежния момент

$$J_{yz} = J_{yz}^{(1)} + J_{yz}^{(2)} + J_{yz}^{(3)} + \dots + J_{yz}^{(n)} . \quad (9.27)$$

Обикновено се определят инерционните моменти спрямо централните оси на фигурата. Инерционният момент на сложни фигури, при които централната ос на фигурата съвпада с централната ос на съставните фигури се определя сравнително лесно. В тези случаи инерционният момент спрямо общата централна ос се определя като сбор или разлика от инерционните моменти на отделните фигури. Така например за сечението показано на:



Фиг.9.7

Фиг.9.7а:

$$J_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{bh^3}{12};$$

Фиг.9.7б:

$$J_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12};$$

Фиг.9.7в:

$$J_y = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12}.$$

При сложни фигури, на които централните оси не съвпадат с централните оси на отделните фигури, е необходимо да се спазва следната последователност:

- 1) Определят се координатите на центъра на тежестта на сложната фигура.
- 2) Разделя се сложната фигура на прости фигури, на които се определят инерционните моменти спрямо централните оси на сложната фигура (по теоремите на Щайнер).
- 3) Събират се (при отвори се изваждат) така определените инерционни моменти.
- 4) Направлението на главните инерционни оси и големините на главните инерционни моменти се определят от уравнения (9.23) и (9.24).

9.8. Инерционни радиуси

Инерционният радиус на една фигура спрямо дадена ос u се определя чрез формулата

$$i_u = \pm \sqrt{\frac{J_u}{F}}, \quad (9.28)$$

където J_u е осовият инерционен момент на фигурата;

F – лице на фигурата.

Измерението на инерционния радиус е $\sqrt{\frac{m^4}{m^2}} = m$.

Инерционните радиуси на фигурата лесно се пресмятат при известни инерционни моменти.

Така например за кръг с диаметър d ,



$$i_y = i_z = \frac{d}{4}; \quad (9.29)$$

а за квадрат със страна a ,

$$i_y = i_z = 0,289a. \quad (9.30)$$

Инерционните радиуси намират приложение при пресмятане устойчивостта на натиснати пръти. Особен интерес представлява минималният инерционен радиус на фигурата

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}. \quad (9.31)$$

Доказва се, че когато два главни инерционни моменти на една фигура са равни помежду си, инерционните радиуси спрямо всички централни оси са също равни помежду си.

9.9 Съпротивителни моменти

Под осов съпротивителен момент на една фигура се разбира отношението на осовия инерционен момент и разстоянието от централната ос до най-отдалечената точка на фигурата, т.е.

$$W_y = \frac{J_y}{|z|_{\max}}; \quad (9.32.)$$

$$W_z = \frac{J_z}{|y|_{\max}}. \quad (9.33.)$$

където $|z|_{\max}$ и $|y|_{\max}$ са максималните разстояния до най-отдалечените точки на фигурата, съответно от главните централни оси.

Под полярен съпротивителен момент на една фигура се разбира отношението на полярния инерционен момент и разстоянието от полюса до най-отдалечената точка на фигурата, т.е.

$$W_C = \frac{J_C}{\rho_{\max}}. \quad (9.34)$$

Измерението на съпротивителния момент е (4.30.) $m^4/m=m^3$, а знакът условно се приема да бъде винаги положителен. За несиметрични фигури (виж фиг.4.9) обикновено се определят два съпротивителни момента:

$$W_{y,1} = \frac{J_y}{z_1} \quad \text{и} \quad W_{y,2} = \frac{J_y}{z_2}. \quad (9.35)$$

За най-често употребяваните в практиката напречни сечения, показани на фиг.9.4 съпротивителните моменти се пресмятат както следва:



а) Правоъгълник: $W_y = \frac{bh^2}{6}, \quad W_z = \frac{hb^2}{6}.$

(9.36)

б) Квадрат: $W_y = W_z = \frac{a^3}{6}.$

(9.37)

в) Кръг: $W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3,$

(9.38)

$$W_c = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

(9.39)

г) Пръстен: $W_y = W_z = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4),$

(9.40)

$$W_c = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4).$$

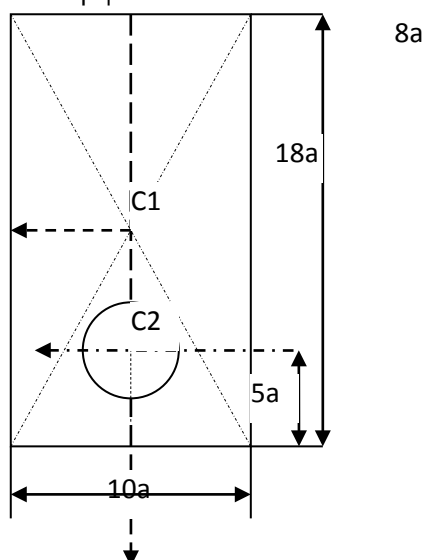
(9.41)

При всички случаи на сложни фигури при определяне на съпротивителния момент трябва да се прилага общата формула (9.32) или (9.33).

За разлика от инерционните моменти съпротивителните моменти на една сложна фигура не се събират или изваждат даже и да са спрямо една и съща ос.

Пример 9.1

Да се определи центъра на тежестта на фигурата. Да се определят главните инерционни оси и да се пресметнат стойностите на главните инерционни моменти.

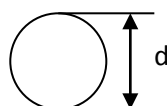


Решение

1. Сложната фигура се разделя на прости фигури



Правоъгълник $10a \times 18a$ $F_1 = 10a \times 18a$ [m²]



Окръжност $F_2 = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi(8a)^2}{4} = 50.24.a^2$ [m²]

2. Поставят се центровете на тежестта на простите фигури C_1 и C_2

3. Избира се спомагателна координатна система $\bar{y} C_1 \bar{z}$

- Сложната фигура има една вертикална ос на симетрия. Тя се избира за ос \bar{z} и е първата определена главна инерционна ос.
- Избираме начало на спомагателната координатна система да съвпада с център C_1 .
- Определяме координатите на центровете на тежестта на простите фигури

Правоъгълник - център на тежестта C_1 ; $\bar{y}_{C_1} = 0$; $\bar{z}_{C_1} = 0$

Окръжност - център на тежестта C_2 ; $\bar{y}_{C_2} = 0$; $\bar{z}_{C_2} = 4a$

4. Определяне на център на тежестта на сложната фигура спрямо спомагателната координатна система.

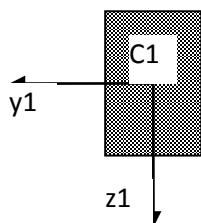
$$\bar{y}_c = \frac{\bar{y}_{c1} \cdot F_1 - \bar{y}_{c2} \cdot F_2}{F_1 - F_2} = 0; \quad \bar{z}_c = \frac{\bar{z}_{c1} \cdot F_1 - \bar{z}_{c2} \cdot F_2}{F_1 - F_2} = \frac{0 \cdot 180a^2 - 4a \cdot 50.24a^2}{180a^2 - 50.24a^2} = -1.55.a$$

5. Определяне на инерционни моменти на съставната фигура спрямо спомагателната координатна система $\bar{y} C_1 \bar{z}$

5.1. Инерционен момент на първата фигура (правоъгълник) спрямо $\bar{y} C_1 \bar{z}$

$$J_{\bar{y}}^{(1)} = J_{y_1} = \frac{bh^3}{12}$$

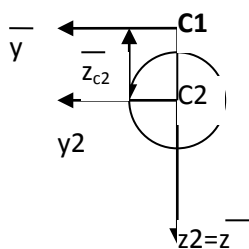
$$J_{\bar{z}}^{(1)} = J_{z_1} = \frac{hb^3}{12}$$



$$J_{\bar{y}} = J_{y_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{10a \cdot (18a)^3}{12} = 4860a^4$$

$$J_{\bar{z}} = J_{z_1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{18a \cdot (10a)^3}{12} = 1500a^4$$

5.2. Инерционен момент на втората фигура спрямо $\bar{y} C_1 \bar{z}$



$$J_{y2} = J_{z2} = \frac{\pi d^4}{64} = 200.96a^4$$

$$J_y^{(2)} = J_{y2} + z_{C2}^2 \cdot F_2 = 200.96a^4 + (4a)^2 \cdot 50.24a^2 = 320\pi a^4 = 1004.78a^4$$

$$J_z^{(2)} = J_{z2} + y_{C2}^2 \cdot F_2 = J_{z2} = 200.96a^4$$

6. Инерционни моменти на сложната фигура спрямо спрямо \bar{y} $C1$ \bar{z}

$$J_{\bar{y}} = \sum_{i=1}^n J_{y,i}$$

При кухина или отвор (празнина) инерционните моменти се изваждат.

$$J_{\bar{y}} = J_y^{(1)} - J_y^{(2)} = 4869a^4 - 1004.8a^4 = 3855.2a^4$$

$$J_{\bar{z}} = J_z^{(1)} - J_z^{(2)} = 1299.04a^4$$

7. Определяне на инерционните моменти спрямо осите, минаващи през центъра на тежестта на съставната фигура т.С

Използваме зависимостта:

$$J_{\bar{y}} = J_{y_c} + z_c^2 \cdot \sum_{i=1}^n F_i$$

Инерционният момент на съставна фигура спрямо ос, която е успоредна на централната ос (през центъра на тежестта) е равна на сумата от главния инерционен момент на цялата фигура (през т.С) и произведението на координата на центъра на тежестта на втора степен и сумата от лицата на простите фигури, които я съставят. Инерционният момент на съставната фигура спрямо ос, минаваща през центъра на тежестта т.С е:

$$J_{y_c} = J_{\bar{y}} - z_c^2 \cdot \sum_{i=1}^n F_i$$

$$J_{z_c} = J_{\bar{z}} - y_c^2 \cdot \sum_{i=1}^n F_i, \quad n - \text{брой на фигурите}$$

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_1 - F_2 = 180a^2 - 50.24a^2 = 129.76a^2$$

$$J_{y_c} = J_{\bar{y}} - z_c^2 \cdot \sum_{i=1}^n F_i = 3855.2a^2 - (1.55a)^2 \cdot 129.76a^2 = 3543.25a^2$$

$$J_{z_c} = J_{\bar{z}} - y_c^2 \cdot \sum_{i=1}^n F_i = 1299.04a^2$$

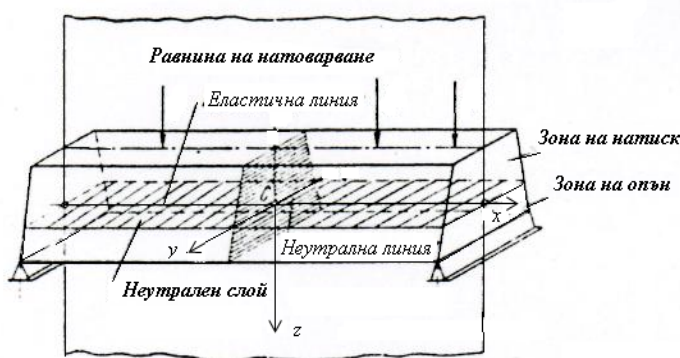


10. Специално огъване на прави греди

10.1. Основни понятия и определения

Когато под действието на една статично уравновесена система от сили или моменти един прав прът се изкривява, казваме, че той е подложен на огъване. Прътите подложени на огъване, се наричат греди и условно се чертаят с контурна линия.

Ще разгледаме греди с праволинейна ос и постоянно напречно сечение, което има ос на симетрия (фиг.10.1). Външните сили (моменти), които огъват гредата, лежат в равнина, минаваща през оста, наречена равнина на натоварване. Приема се, че външните сили са перпендикулярни на оста на гредата.



Фиг.10.1

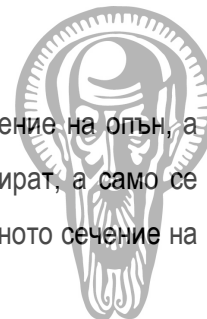
При изчисленията на огъване се приема следната координатна система: оста x да съвпада с праволинейната ос на гредата (под ос на гредата се разбира оста, минаваща през центровете на тежестта на напречните сечения); осите y и z да съвпаднат с главните инерционни оси на сечението.

Равнините, които минават през оста на гредата и двете главни ос на напречните сечения, се наричат главни инерционни равнини.

Ако равнината на натоварване съвпада с една от главните инерционни равнини, огъването се нарича специално (просто). В този случай вътрешните усилия в дадено напречно сечение се редуцират на главен вектор $R=Qz$, насочен по едната главна инерционна ос и на главен момент $M = M_{oz,y} (M_{oz,z})$, насочен по другата главна инерционна ос. Ако външните сили са разположени така, че в дадено сечение вътрешните сили се редуцират само на главен момент, се казва, че гредата е натоварена на чисто специално огъване.

Когато външните сили са разположени по такъв начин, че в дадено сечение главният момент е в общо положение спрямо главните инерционни оси, се казва, че гредата е натоварена на общо (двойно) огъване.

Огънатата ос на гредата се нарича еластична линия.

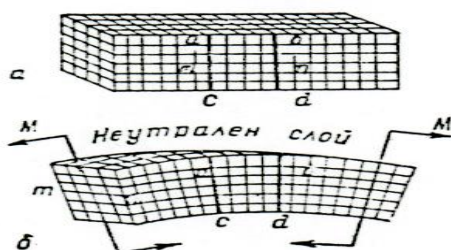


При огъване на гредата надлъжните влакна на изпъкналата и част са подложени на опън, а тези на вдлъбнатата – на натиск. Междинният слой, в който влакната не се деформират, а само се изкривяват, се нарича неутрален слой. Пресечната линия на неутралния слой с напречното сечение на гредата се нарича неутрална линия или неутрална ос.

10.2. Нормални напрежения при чисто огъване

При извода на закона за разпределение на нормалните напрежения се приема, че материалът е хомогенен, изотропен и се подчинява на закона на Хук. Приема се също така, че две безкрайно близки напречни сечения на гредата, които са били равни и успоредни преди натоварването, остават равни и след натоварването като се завъртат на известен ъгъл $d\varphi$.

Фиг.10.2

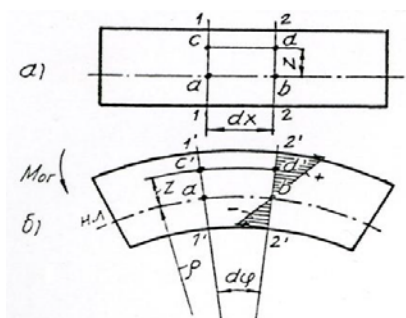


За наблюдаване на деформациите при чисто огъване разглеждаме гредата, по стените на която е начертана мрежа (фиг.10.2а). Като се приложи двойката сили, гредата се огъва, както е показано на фиг.10.2б. Забелязва се, че линиите успоредни на оста и, са огънати, а линиите перпендикулярни на оста се наклоняват, но

остават преви и са перпендикулярни на оста на гредата. Освен това линиите, които се намират на изпъкналата част на гредата, са удължени, а на вдлъбнатата са скъсени. Оста на гредата е огъната, но нито е удължена, нито е скъсена.

За определяне на напрежението в произволна точка, отстояща на разстояние z от оста на гредата, разглеждаме част от гредата между две безкрайно близки напречни сечения 1-1 и 2-2 (фиг.10.3). Двете сечения са наклонени под ъгъл $d\varphi$ и са перпендикулярни на оста на гредата.

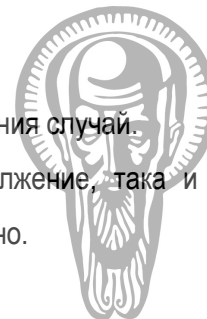
Фиг.10.3.



Преди деформацията $cd=ab=dx$, а след деформацията $c'd' > ab=dx$.

Относителното удължение на влакното cd , намиращо се на разстояние z от неутралната линия се определя по следния начин:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{c'd' - ab}{cd} = \frac{\overline{c'd'} - \overline{ab}}{ab} = \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{z}{\rho}, \quad (10.1.)$$



където ρ е радиус на кривината на неутралната линия, който е постоянен за разглеждания случай. С помощта на уравнение (10.1.) може да се изчислява както относителното удължение, така и относителното скъсяване, в зависимост от слоя, в който се намира разглежданото влакно. Нормалното напрежение се определя от закона на Хук

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{z}{\rho}, \quad (10.2.)$$

където $\frac{E}{\rho} = const$ за разглеждания случай.

При $z > 0$ следва, че $\rho > 0$ и обратно, следователно:

$$\sigma = \pm \frac{E}{\rho} z \quad (10.2a.)$$

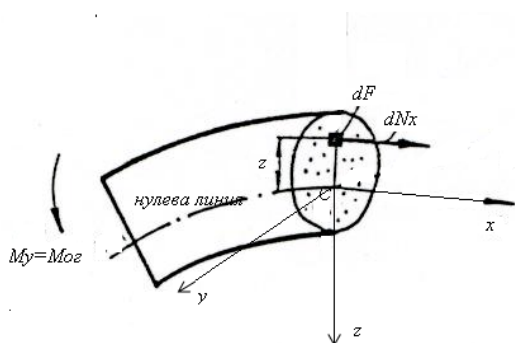
Знакът плюс е за опънатите влакна, а знакът минус – за натистнатите влакна.

Уравнение (10.2.) показва, че нормалните напрежения са правопрпорционални на отдалечаването на влакната от неутралния слой, че еднакво отдалечените влакна изпитват еднакви напрежения и че най-голямото напрежение изпитват най-отдалечените влакна от неутралния слой. Диаграмата на нормалните напрежения е показана на фиг.10.2б.

За определяне на нормалното напрежение в зависимост от огъващия момент, разглеждаме равновесието на лявата отрязана част на гредата (фиг.10.4).

Нека върху елементарната площ dF от сечението действа нормална сила, определена от израза:

Фиг.10.4



$$dN_x = \sigma dF = \frac{E}{\rho} z dF.$$

От условието за равновесие по оста x , се получава

$$\sum x = 0, \quad \int_{(F)} dN = \int_{(F)} \frac{E}{\rho} z dF = \frac{E}{\rho} \int_{(F)} z dF = 0,$$

$$\text{където } \frac{E}{\rho} \text{ е постоянна величина, а } S_y = \int_{(F)} z dF = 0$$

е статичния момент на сечението спрямо оста y .

Следва, че при чисто огъване неутралната ос минава винаги през центровете на тежестта на напречните сечения.



От моментното условие за равновесие спрямо т.С (център на тежестта на напречното сечение) се получава:

$$\sum M_{i,c} = 0, \quad M_{or} - \int_{(F)} dN \cdot z = 0,$$

откъдето

$$M_{or} = \int_{(F)} dN \cdot z = \int_{(F)} \frac{E}{\rho} z^2 dF = \frac{E}{\rho} \int_{(F)} z^2 dF.$$

Интегралната сума $\int_{(F)} z^2 dF = J_y$ е осовият инерционен момент на сечението спрямо оста y .

Следователно огъващият момент се пресмята с израза

$$M_{or} = \frac{E}{\rho} J_y. \quad (10.3)$$

Кривината на неутралната линия се определя от уравнение (6.3.), както следва

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_{or}}{EJ_y}. \quad (10.4)$$

От уравненията (10.3.) се определя отношението $\frac{E}{\rho}$, което се замества в уравнение (10.2) и се получава израз за определяне на нормалното напрежение

$$\sigma = \frac{E}{\rho} z = \frac{M_{or}}{J_y} z. \quad (10.5)$$

Обикновено под напрежение на огъване се разбира максималното нормално напрежение, което се получава при $z = |z|_{\max}$, а именно

$$\sigma_{or} = \sigma_{\max} = \frac{M_{or}}{J_y} z_{\max} = \frac{M_{or}}{\left(\frac{J_y}{|z|_{\max}} \right)}.$$

Отношението

$$W_y = \frac{J_y}{|z|_{\max}}, \quad (10.6)$$

е осовият съпротивителен момент на сечението спрямо оста y .

Следователно нормалното напрежение при чисто огъване се определя от израза

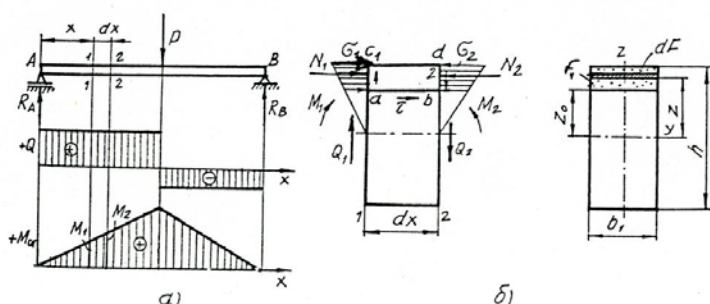


$$\sigma_{or} = \frac{M_{or}}{W_y} \quad (10.7)$$

10.3. Тангенциални напрежения при специално огъване

Както е известно, при специално огъване в напречните сечения на гредата възникват огъващи моменти и тангенциални усилия, които от своя страна, възбуждат нормални и тангенциални напрежения.

Фиг.10.5



От закона за реципрочност на тангенциалните напрежения следва, че и в надлъжните сечения на гредата, подложена на специално огъване има тангенциални напрежения.

За изследване разпределението и големината на тангенциалните напрежения,

разглеждаме гредата с правоъгълно напречно сечение с широчина b_1 и височина h , подложена на специално огъване, като познаваме тангенциалното усилие във всяко напречно сечение (фиг.10.5).

В случая на правоъгълно напречно сечение се приема, че тангенциалното напрежение е успоредно на тангенциалното усилие, а големината му не се изменя по широчината на напречното сечение, т.е. зависи само от разстоянието на разглежданата точка до неутралния слой.

Да разгледаме елемент между сеченията 1-1 и 2-2 на гредата, показана на фиг.10.5а, отделен и начертан увеличен на фиг.10.5б. На разглеждания елемент сме направили и едно надлъжно сечение ab , което отстои на разстояние z_0 от неутралния слой. Тези сечения от гредата отделят безкрайно малкия паралелепипед с размери dx , b_1 и $h/2-z_0$. Огъващият момент в сечение 1-1 е M_1 , в сечение 2-2 е $M_2=M_1+dM$ (фиг.10.5б). Да разгледаме равновесието на паралелепипеда. Действието на отстранената гредата замества с вътрешните усилия. По околната стена ac действа нормалното напрежение σ и тангенциалното напрежение τ , насочено нагоре. По околната среда bd действа нормално напрежение и тангенциално напрежение, насочено надолу, в надлъжното сечение ab действат само тангенциални напрежения, насочени надясно.

Елементарната нормална сила dN_1 , която действа на елементарна площ dF (ивицата на напречното сечение, показана на фиг.10.5б) от лявата околна стена ac , която отстои на разстояние z от неутралната ос u , е равна:



$$dN_1 = \sigma_1 dF_1, \text{ но } \sigma = \frac{M_1}{J_y} z.$$

Следователно

$$dN_1 = \frac{M_1}{J_y} z dF, \quad (10.8.)$$

където J_y е инерционният момент на цялото сечение спрямо неутралната ос на напречното сечение. Елементарните нормални сили dN образуват една система от успоредни еднопосочни сили, действащи върху лявата страна на паралелепипеда с площ:

$$F_1 = b_1 \left(\frac{h}{2} - z_0 \right).$$

Защрихованата площ на фиг.10.5б, т.е. площта на надлъжното сечение, е еквивалентна на една единствена сила:

$$N_1 = \int_{(F)} \frac{M_1}{J_y} z dF, \quad (10.9.)$$

където M_1 и J_y са постоянни величини в разглежданото сечение, следователно те могат да се изнесат пред интеграла или

$$N_1 = \frac{M_1}{J_y} \int_{(F)} z dF = \frac{M_1}{J_y} S_{y(z)}, \quad (10.10.)$$

където $\int_{(F)} z dF$ представлява статичният момент на площта F_1 спрямо неутралната ос y , който означаваме с $S_{y(z)}$ като функция на z . Аналогично се определя големината на силата N_2 , която действа върху дясната стена bd на паралелепипеда, т.е.

$$N_2 = \frac{M_2}{J_y} S_{y(z)} = \frac{M_1 + dM}{J_y} S_{y(z)}. \quad (10.11.)$$

Елементарните тангенциални сили $dT = \tau dx$ върху долната стена ab на паралелепипеда $acdb$ са успоредни и еднопосочни, понеже страната $ab = dx$ е безкрайно малка. Приемаме, че тези сили са равномерно разпределени по долната стена на паралелепипеда с лице $dx \cdot b_1$, следователно резултантната им ще бъде силата dT с големина

$$dT = \tau b_1 dx. \quad (10.12.)$$

Силите N_1 , N_2 и dT са успоредни на оста x на гредата, при това, тъй като $M_1 > M_2$, то и силата $N_2 > N_1$.

Условието за равновесие на тези сили $\sum x = 0$, дава:

$$N_2 - N_1 = dT, \quad \frac{M_1 + M}{J_y} S_{y(z)} - \frac{M_1}{J_y} S_{y(z)} = \tau b_1 dx,$$



или
$$\frac{dM}{J_y} S_{y(z)} = \tau b_1 dx$$

откъдето
$$\tau = \frac{dM \cdot S_{y(z)}}{b_1 dx J_y} .$$

(10.13.)

При $Q = \frac{dM}{dx}$ се получава крайния израз за определяне тангенциалното напрежение при специално огъване

$$\tau = \frac{Q \cdot S_{y(z)}}{b_1 J_y} , \quad (10.14.)$$

където Q е тангенциалното усилие в разглежданото сечение;

J_y – осовият инерционен момент на цялото сечение спрямо неутралната ос;

b_1 – широчината на напречното сечение, измерена в точката, за която търсим напрежението;

$S_{y(z)}$ – абсолютната стойност на статичния момент спрямо неутралната ос на онази част от сечението, определено с права, успоредна на неутралната ос, прекарана през точката, в която търсим тангенциалното напрежение и не съдържа центъра на тежестта на напречното сечение.

Формулата (10.14.) е известна като формула на Журавски. Тя дава големината на тангенциалното напрежение във всички точки, отстоящи на дадено разстояние z от неутралната ос. За правоъгълно сечение b_1 и J_y са постоянни. Следователно напрежението в дадено сечение, където е известна ще бъде функцията само на статичния момент. За ръбовите точки, най-отдалечените от неутралната линия, статичният момент е нула, следователно и напрежението е нула. За точки, лежащи на неутралната ос, тангенциалното напрежение е най-голямо, тъй като статичния момент на площта на фигурата, намираща се извън неутралната ос, е най-голямо.

10.4. Якостни условия при специално огъване

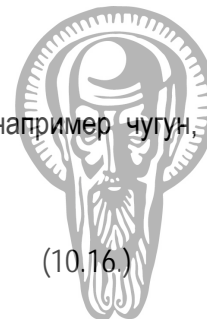
Якостното условие по нормални напрежения при специално огъване за материали, които се съпротивляват еднакво на опън и натиск (например стомана), има вида

$$\sigma_{oz} = \sigma_{\max} = \frac{M_{oz}}{W_y} \leq \sigma_{\text{дон}} , \quad (10.15.)$$

където M_{oz} е максималната абсолютна стойност на огъващия момент в застрашеното сечение;

$\sigma_{\text{дон}}$ – допустимото напрежение на огъване.

За икономичното използване на материала в този случай се използват напречни сечения, симетрични спрямо нулевата линия.



При греди, чиито материал се съпротивлява различно на опън и натиск (например чугун, дърво), якостните условия са две:

$$\sigma_{oz} = \frac{M_{oz}}{W_{y,1}} \leq \sigma_{\partial,op} , \quad (10.16.)$$

$$\sigma_n = \frac{M_{oz}}{W_{y,2}} \leq \sigma_{\partial,n} , \quad (10.17.)$$

където $W_{y,1} = \frac{J_y}{\max z_1}$ и $W_{y,2} = \frac{J_y}{\max z_2}$ са осовите съпротивителни моменти на сечението за най-

отдалечените точки от сечението, подложени съответно на опън и натиск;

$\sigma_{\partial,op}$ – допустимото напрежение на опън;

$\sigma_{\partial,n}$ – допустимото напрежение на натиск.

За икономичното използване на материала в тези случаи се избират напречни сечения, несиметрични спрямо нулевата линия.

При специално огъване, както е известно, съществуват нормални и тангенциални напрежения. В такъв случай в характерните точки на напречното сечение якостната проверка трябва да се направи по главните напрежения, определени от израза

$$\sigma_{\max,\min} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq \sigma_{don} . \quad (10.18.)$$

Обикновено тангенциалните напрежения в сравнение с нормалните са много по-малки и в повечето случаи се пренебрегват.

Пример 10.4.1. Права задача

За посочената по-долу греда да се построят диаграмите на вътрешните усилия и да се определи критичното сечение с максимален огъващ момент. Да се пресметне нормалното напрежение в застрашеното сечение. Напречното сечение е квадратно с размери 10 cm.

Решение:

Опорните реакции са $RA_z = 7.75 \text{ kN}$, насочена надолу, $RB_z = 16.250 \text{ kN}$ насочена нагоре.

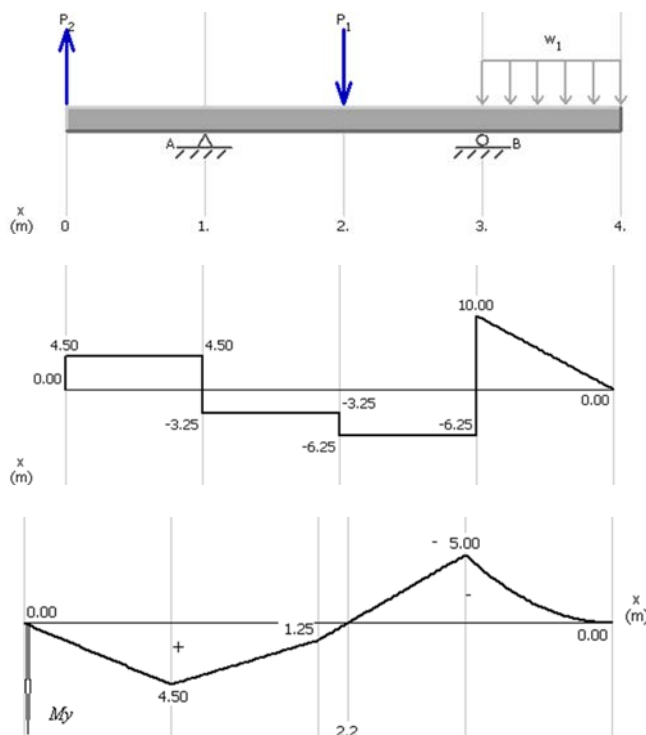
$$P_1 = 3 \text{ kN}; P_2 = 4.5 \text{ kN}; q = w_1 = 10 \text{ kN/m}$$

Съпротивителният момент е:

$$W_y = \frac{0,1^3}{6} = 0,000167 \text{ m}^3$$

Максималното нормално напрежение е:

$$\sigma_{ог,\max} = \frac{|M_{\max}|}{W_y} = \frac{5000}{0,000167} = 30 \text{ MPa}$$



Обратна задача 10.4.2: За посочената греда ($P_1=6000$ N, $P_2=8000$ N, $M=5000$ N.m, $q=3000$ N/m) да се пострят диаграмите на вътрешните усилия и да се оразмери гредата, т.е да се намерят размерите на кръглото напречно сечение, ако материалът има допустимо нормално напрежение $[\sigma]=80$ MPa .

Решение

Опорните реакции са $R_{Az}=9500$ N, насочена нагоре, $R_{Bz}=1500$ N, насочена надолу.

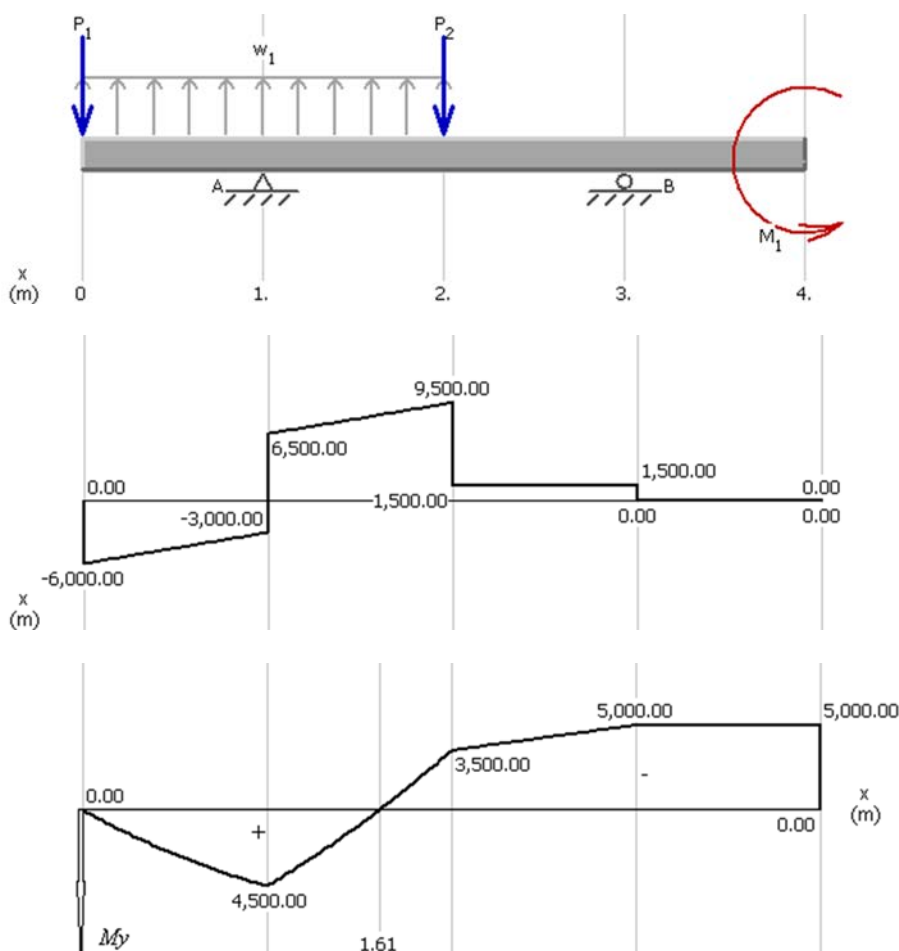
$$\sigma_{ог,max} = \frac{|M_{max}|}{W_y} \leq [\sigma]$$

$$W_y = \frac{\pi d^3}{32} = 0,1d^3$$

$$W_y \geq \frac{|M_{max}|}{[\sigma]}$$

$$0,1d^3 \geq \frac{5000}{80 \cdot 10^6} \rightarrow d \geq 0,0397m$$

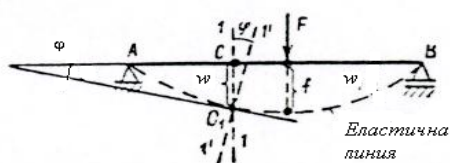
Приема се греда със кръгло сечение с диаметър $d=4$ cm. Така оразмерената греда ще издържи приложеното натоварване.



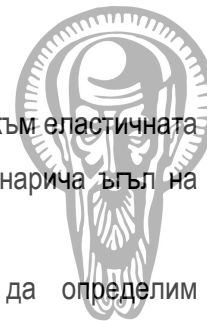
10.5. Деформация при специално огъване

а) Основни понятия

Вторият проблем, който ни интересува във връзка с огъването на една греда, е въпросът за деформацията при огъване. Известно е, че под действието на системата външни сили правата греда се огъва, като огънатата и ос се нарича еластична линия. На фиг.10.6 е показана на деформацията на огънатата греда, като за яснота деформацията е силно увеличена. Преместването във вертикална посока вследствие външното натоварване на коя да е точка от оста на гредата, например т.С, се нарича провисване на гредата в това сечение и се бележи с буквата w . Най-голямото провисване w_{max} се нарича максимално провисване на гредата и се отбелязва с f .



Фиг. 10.6



Завъртането на напречните сечения се отчита с ъгъл φ (виж фиг.10.6). Допирателната към еластичната линия в т.С₁ сключва същия ъгъл с недеформираната ос на гредата. Ъгълът φ се нарича ъгъл на завъртането на сечението или наклон на еластичната линия в разглежданото сечение.

Да определим деформацията на дадена натоварена греда означава да определим провисването и и наклона на еластичната линия. Провисването и наклонът на еластичната линия са различни за различните сечения на гредата, обаче в практиката най-често се използва максималното провисване, където наклонът на еластичната линия е нула и максималният наклон на еластичната линия.

Тъй като провисването при еднакви други условия зависи от дължината на гредата, въвежда се понятието относително провисване, което представлява провисването за единица дължина.

При греди с голяма дължина относителното провисване не трябва да надвишава установеното от практиката допустимо относително провисване.

б) Диференциално уравнение на еластичната линия

При извода на формулата за нормалните напрежения при специално огъване е получен израз, даващ връзката между кривината на еластичната линия и огъващия момент, а именно

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}. \quad (10.18)$$

Това уравнение показва, че кривината $1/\rho$ се изменя по дължината на гредата по същия закон, по който се изменя големината на огъващия момент, тъй като гредата е с постоянно напречно сечение и е от един и същ материал. Ако гредата е подложена на чисто огъване при $M=const$ следва, че радиусът на кривината е постоянна величина, т.е. гредата се огъва по окръжност.

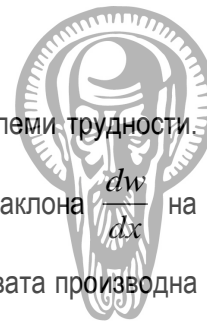
За аналитичното определяне на провисванията в различните точки на гредата се използва известното уравнение от диференциалната геометрия, а именно

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{w''}{[1 + (w')^2]^{3/2}}, \quad (10.20)$$

където $w' = \frac{dw}{dx}$ и $w'' = \frac{d^2w}{dx^2}$ са първата и втората производна на провисването спрямо абцисата x .

При заместване на уравнение (6.20.) в (6.19.) се получава диференциалното уравнение на еластичната линия

$$\pm \frac{w''}{[1 + (w')^2]^{3/2}} = \frac{M}{EJ}. \quad (10.21)$$



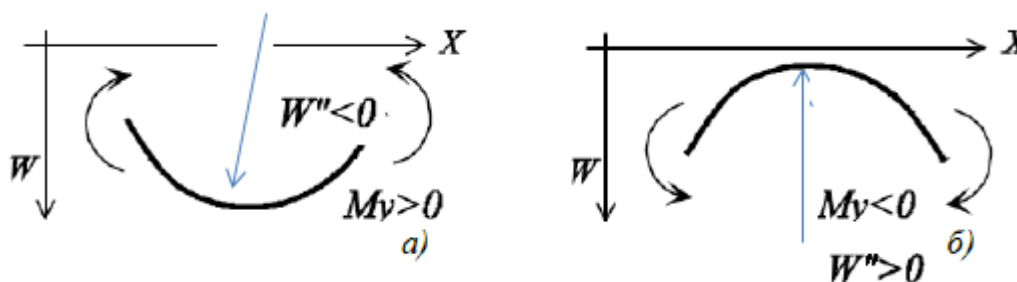
Интегрирането на това нелинейно диференциално уравнение е свързано с големи трудности.

Обикновено в практиката провисванията са много малки и тангенсът на ъгъла на наклона $\frac{dw}{dx}$ на допирателната към еластичната линия също е малък, следователно квадратът на първата производна в знаменателя в сравнение с единицата може да се пренебрегне. В такъв случай се получава следното приблизително диференциално уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \pm \frac{M}{EJ}. \quad (10.22)$$

В това уравнение са поставени два знака, тъй като знакът на кривината може да не съвпада със знака на огъдащия момент.

Знакът на кривината зависи от направлението на осите. Така например за случая, когато оста z е насочена надолу нагоре, кривината е отрицателна (фиг.10.7а) при положителен огъващ момент и положителна при отрицателен огъващ момент (фиг.10.7б).



Фиг.10.7

За да определим аналитичните зависимости между провисването и ъгълът на завъртане в зависимост от местоположението на разглежданото сечение е необходимо да се реши диференциалното уравнение (10.22.), на което дясната част е функция на x .

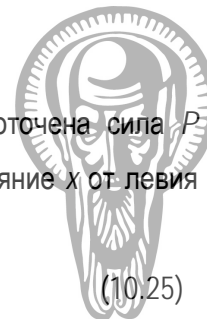
Чрез последователно интегриране се получава

$$\frac{dw}{dx} = \pm \int_0^l \frac{M}{EJ} dx + C; \quad (10.23)$$

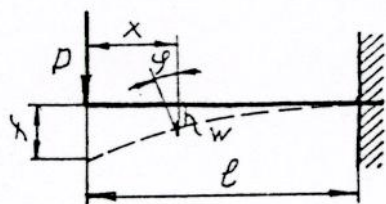
$$w = \pm \int_0^l \int_0^l \frac{M}{EJ} dx dx + Cx + D, \quad (10.24)$$

където C и D са интеграционни константи, зависещи от граничните условия.

Уравнение (10.23.) дава ъгълът на наклона на напречните сечения, а уравнение (10.24.) – провисванията на гредата.



Като пример да разгледаме конзолна греда с дължина l , натоварена със съсредоточена сила P (фиг.10.8). Огъващият момент в сечение на разстояние x от левия край се определя от израза



$$M = -Px. \quad (10.25)$$

Тъй като положителната посока на оста z е насочен нагоре, то в дясната част на уравнение (10.22.) трябва да се вземе знак плюср т.е.

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{P}{EJ}x. \quad (10.26)$$

Интегрирайки горното уравнение и вземайки пред вид, че $EJ=const$ и интеграционното условие (при $x = l, \frac{dw}{dx} = tg\varphi = 0$) се получава

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{P}{2EJ}x^2 + \frac{P}{2EJ}l^2, \quad (10.27)$$

което представлява стойността на ъгъла на завъртане на произволно сечение в зависимост от разстоянието x .

Чрез интегриране на уравнение (10.27.) и вземане пред вид интеграционното условие (при $x = l, w=0$) се получава

$$w = -\frac{P}{6EJ}x^3 + \frac{Pl^2}{2EJ}x - \frac{Pl^3}{3EJ}, \quad (10.28)$$

което представлява уравнение, даващо стойностите на провисването на произволно напречно сечение в зависимост от разстоянието x .

Максималното провисване ($w_{max}=f$) и максималният ъгъл ($\varphi_{max}=0$) се получават от уравнения (10.27) и (10.28) при $x=0$

$$f = w_{max} = -\frac{Pl^3}{3EJ}, \quad (10.29.)$$

$$\theta = \varphi_{max} = \frac{P}{2EJ}l^2. \quad (10.30.)$$

Знакът минус в уравнение (10.29) показва, че посоката на провисването не съвпада с положителната посока на оста z .

10.6. Потенциална енергия на деформацията при специално огъване

Както е известно, потенциалната енергия, съдържаща се в единица обем на тялото в границите на еластичните деформации, се определя по следния начин:



а) при действие на нормални напрежения

$$U = \frac{1}{2}\sigma_1\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\sigma_2\varepsilon_2 + \frac{1}{2}\sigma_3\varepsilon_3; \quad (10.31)$$

б) при действие на тангенциални напрежения

$$U = \frac{1}{2}\tau\gamma. \quad (10.32)$$

При специално огъване напреженията σ_2 и σ_3 са равни на нула, а останалите напрежения се определят от изразите:

$$\sigma = \frac{M}{J}z, \quad (10.33)$$

$$\tau = \frac{QS_{(z)}}{Jb_{(z)}}. \quad (10.34)$$

Следователно потенциалната енергия, съдържаща се в елементарен обем dV от гредата има стойност

$$dU = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon dV + \frac{1}{2}\tau\gamma dV. \quad (10.35)$$

Като вземем в предвид действието на закона на Хук

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \gamma = \frac{\tau}{G},$$

се получава

$$dU = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}dV + \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}dV. \quad (10.36)$$

След заместване на σ и τ от уравнения (6.33.) и (6.34.) и интегрирайки по целия обем се получава

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx + \frac{k}{2}\int_0^l \frac{Q^2}{GF} dx. \quad (10.37)$$

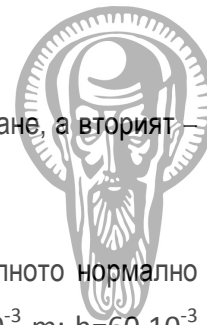
Вземайки пред вид, че $dV=dF \cdot dx$ и замествайки обемния интеграл с двоен интеграл и след несложни преобразувания се получава

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EJ} dx + \frac{k}{2}\int_0^l \frac{Q^2}{GF} dx, \quad (10.38)$$

където

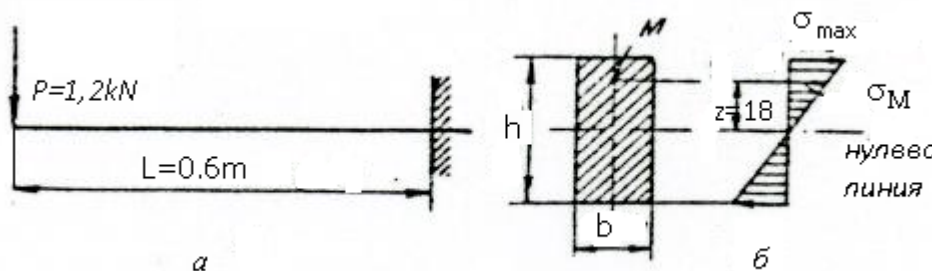
$$k = F \int_{(F)} \left(\frac{S_{(z)}}{Jb_{(z)}} \right)^2 dF, \quad (10.39)$$

е безразмерен коефициент, който зависи от формата на напрежното сечение и може да бъде определен само тогава, когато е даден типа на сечението. Така например за правоъгълно сечение $k=1,2$.



Първият интеграл на уравнение (10.37) представлява потенциалната енергия при огъване, а вторият – при плъзгане.

Пример 10.1. За показаната на фиг. 10.9а конзолна греда да се определи максималното нормално напрежение и напрежението на разстояние $z = 18 \text{ mm}$ от неутралната линия ($b=30 \cdot 10^{-3} \text{ m}$; $h=60 \cdot 10^{-3} \text{ m}$). Да се определи максималното тангенциално напрежение за точки от сечението, лежащи на неутралната линия.



Фиг.10.9

Решение

Максималният огъващ момент в запънатото сечение се изчислява с израза

$$M_{\max} = Pl = 1,2 \cdot 10^3 \cdot 0,6 = 720 \text{ Nm} ,$$

а осовият съпротивителен момент има стойност

$$W_y = \frac{bh^2}{6} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot (60 \cdot 10^{-3})^2}{6} = 18 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 .$$

Максималното нормално напрежение се изчислява по формулата

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{or}}{W_y} = \frac{720}{18 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ MPa} .$$

Диаграмата на нормалните напрежения е показана на фиг.6.9б.

Нормалното напрежение в точка М, намираща се на разстояние $z = 18 \text{ mm}$ от неутралната линия, при инерционен момент на напречното сечение

$$J_y = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \cdot 10^{-3} \cdot (60 \cdot 10^{-3})^3}{12} = 54 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 ,$$

се определя с израза

$$\sigma_M = \frac{M_{or}}{J_y} z_M = \frac{720}{54 \cdot 10^{-8}} = 12 \text{ MPa} .$$

Това напрежение може да бъде определено от пропорцията



$$\frac{\sigma_M}{z_M} = \frac{\sigma_{\max}}{z_{\max}},$$

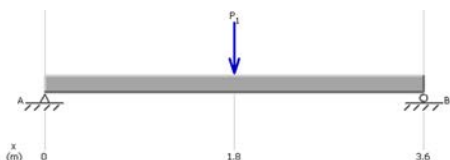
откъдето

$$\sigma_M = \frac{\sigma_{\max}}{z_{\max}} z_M = \frac{40}{30 \cdot 10^{-3}} \cdot 18 \cdot 10^{-3} = 24 \text{ MPa}.$$

Максималното тангенциално напрежение за крайните точки от неутралната линия се определя с израза (6.14.), а именно

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{(z)}}{b_1 J_y} = \frac{Q \frac{bh^2}{8}}{\frac{bh^3}{12} b} = \frac{3Q}{2S} = \frac{3}{2} \frac{1,2 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^{-3} \cdot 60 \cdot 10^{-3}} = 1 \text{ MPa}.$$

От този пример се вижда, че максималното тангенциално напрежение в случая е 40 пъти по-малко от максималното нормално напрежение и затова обикновено при изчисленията се пренебрегва.



Фиг.10.11

Пример 10.2. Да се оразмери по допустимо провисване

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{800},$$

показаната на фиг.10.11 двойно Т-образна греда с дължина $l = 3,6 \text{ m}$, натоварена в средата с товар $P = 20 \text{ kN}$, ако $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$. Да се определи максималното напрежение на огъване.

Решение От израза за максималното провисване $f = \frac{Pl^3}{48EJ_y}$, чрез разделяне с l се получава

относителното провисване

$$\frac{f}{l} = \frac{Pl^2}{48EJ_y}.$$

Необходимият инерционен момент на гредата се определя с израза

$$J_y = \frac{Pl^2}{48E \left(\frac{f}{l} \right)} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3,6^2}{48 \cdot 2,1 \cdot 10^{11} \cdot \frac{1}{800}} = 2070 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4.$$

От таблицата за стандартни профили избираме двойно Т-образен профил №22 с $J_y = 2530 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ и $W_y = 230 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$.

Максималното напрежение на огъване се определя с израза

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_y} = \frac{Pl}{4W_y} = \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 3,6}{4 \cdot 230 \cdot 10^{-6}} = 78,2 \text{ MPa}.$$

Обикновено чрез допустимо провисване се оразмеряват греди със сравнително голяма дължина (носещи греди на мостове, мостови кранове и др.).

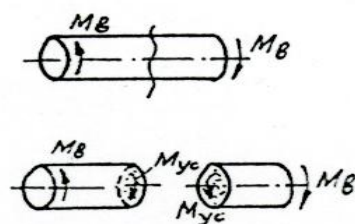


11. Усукване

11.1. Основни понятия

Когато вътрешните усилия в произволно напречно сечение на дадена права гредка се редуцират за центъра на тежестта на сечението на един главен момент, насочен по оста на гредката, тя е подложена на чисто усукване. Това е съществено, когато в края на гредката действат две равни и противоположни двойци сили в равнини, перпендикулярни на оста и (фиг.11.1).

Фиг.11.1



Обикновено елементите подложени на усукване, с кръгово или пръстеновидно напречно сечение, се наричат валове.

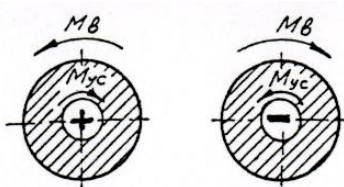
Външните моменти, наречени въртящи моменти (M_B , m), създават в напречните сечения на вала тангенциални напрежения с резултантен вътрешен момент, наречен усукващ момент (M_{yc} , M_x), показан на фиг.11.1.

Като се разглежда равновесието на мислено отрязаните части, се стига до извода, че усукващият момент уравновесява въртящите моменти, които действат на отсечените части, т.е.

$$M_{yc} = |M_B^l| = |M_B^r|, \quad (11.1.)$$

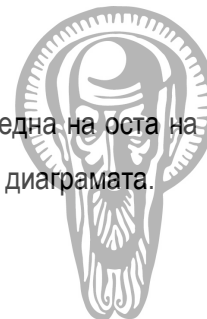
където M_B^l (M_B^r) е алгебричната сума от въртящите моменти, които действат на лявата (дясната) част от вала.

Следователно усукващият момент, който възниква в произволно напречно сечение на вала, числено е равен на алгебричната сума от въртящите моменти, действащи върху частта от вала, намираща се от едната страна на разглежданото сечение.



Знакът на усукващия момент няма физически смисъл, но при построяване на диаграмата му ще се счита, че той е положителен, когато за наблюдател, който гледа откъм страната на сечението, въртящите моменти имат посока, обратна на посоката на въртене на часовниковата стрелка (фиг.11.2).

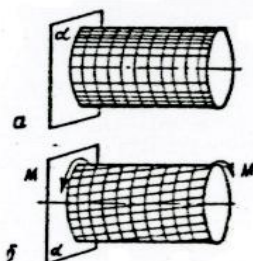
За пресмятане на валове, подложени на усукване е необходимо да се знаят големината на усукващия момент във всяко напречно сечение. Законът за изменение на M_{yc} по дължината на вала се представя във вид на диаграма, наречена диаграма на усукващите моменти. При построяването и



големината на $M_{ус}$ се нанася в определен мащаб, перпендикулярно на правата, успоредна на оста на вала. Положителните усукващи моменти се нанасят над, а отрицателните – под оста на диаграмата.

11.2. Напрежения и деформации при усукване на вал с кръгово напречно сечение

Фиг.11.3



Представата за характера на деформацията при усукване може да се получи, като се направи следният опит. Цилиндричен прът от каучук (фиг.11.3а) с предварително нанесена по околната му повърхнина ортогонална мрежа се закрепва неподвижно в равнината α . В свободния му край се прилага двоица сили с момент M , лежаща в равнина перпендикулярна на оста на пръта. Мрежата, нанесена върху околната повърхнина на пръта, след прилагане на външния момент

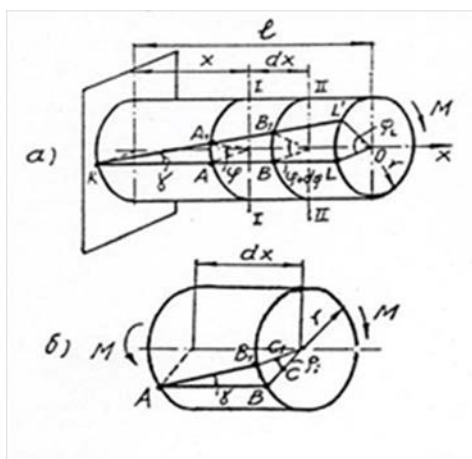
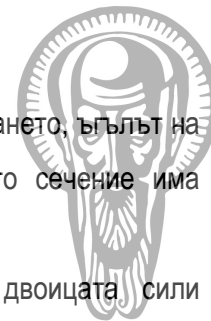
придобива вида, показан на фиг.11.3б.

Въз основа на многобройни подобни опити, извършени от различни изследователи, могат да се направят следните предположения за деформациите при усукване:

- 1) Напречните сечения на вала, перпендикулярни на неговата ос до деформацията, остават перпендикулярни на оста му и след деформацията, като запазват разстоянието помежду си. Това означава, че на дължините вълкна не се деформират, т.е. запазват първоначалната си дължина.
- 2) Образоващите, начертани по дължина на вала, при деформацията се превръщат във винтови линии.
- 3) Радиалните прави, начертани в отделните напречни сечения, след деформацията остават също прави линии, като се завъртат на известен ъгъл.

Въз основа на приетите предположения, усукването на вал с кръгово напречно сечение може да се представи като резултат от плъзгане, предизвикано с взаимно завъртане на напречните сечения едно спрямо друго.

Да разгледаме вал с дължина l и радиус r , здраво закрепен в единия си край (фиг.11.4а), а на свободния му край действа двоица сили с момент M . Образоващата KL преди деформацията се превръща след деформацията във винтова линия с ъгъл на наклона γ , наречен ъгъл на сместване. Радиус-векторът OL при деформацията се е завъртял на ъгъл φ , наречен ъгъл на усукване. Както се вижда от фигурата, ъгълът на усукване φ е различен за различните сечения на вала – колкото сечението е по-близо до мястото на закрепването, толкова той е по-малък.



Фиг. 11.4

За сечението в мястото на закрепването, ъгълът на усукване е равен на нула, а за крайното сечение има максимална стойност.

В резултат на прилагането на двоицата сили сечение I-I, взето на разстояние x от мястото на закрепването, ще се завърти на ъгъл φ , а съседното сечение II-II, взето на разстояние dx от сечението I-I, ще се завърти на ъгъл $\varphi + d\varphi$. Да разгледаме отделно елементарния участък на вала с дължина dx (фиг.11.4б), като за удобство лявото сечение ще считаме за неподвижно. Образоващата AB при деформацията се

отклонява на ъгъл γ и заема положение AB_1 . Ъгълът на сместване за образоващата, лежаща на повърхността на вала се определя от израза

$$\gamma = \frac{BB_1}{AB} = \frac{rd\varphi}{dx}. \quad (11.2.)$$

Образоващата DC , лежаща на вътрешната цилиндрична повърхност на разстояние ρ_i от центъра, се отклонява на ъгъл γ_i , определен от израза

$$\gamma_i = \frac{CC_1}{DC} = \frac{\rho_i d\varphi}{dx} = \rho_i \theta. \quad (11.3.)$$

Отношението $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ се нарича относителен ъгъл на усукване.

За даден вал с постоянно напречно сечение и натоварен с постоянен по големина въртящ момент относителният ъгъл на усукване е постоянна величина, която зависи от материала на вала.

Уравнение (11.3.) отразява геометричната страна на въпроса.

При условие, че деформациите при усукване са в границата на пропорционалността, за разглежданите две точки B и C може да се приложи законът на Хук при плъзгане $\tau = G \gamma$, както следва:

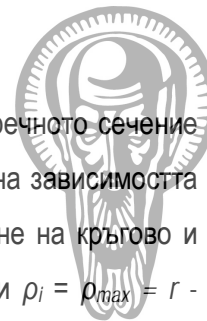
$$\tau = G\gamma = Gr \frac{d\varphi}{dx} = Gr\theta; \quad (11.5.)$$

$$\tau_i = G\gamma_i = G\rho_i \frac{d\varphi}{dx} = G\rho_i \theta. \quad (11.6.)$$

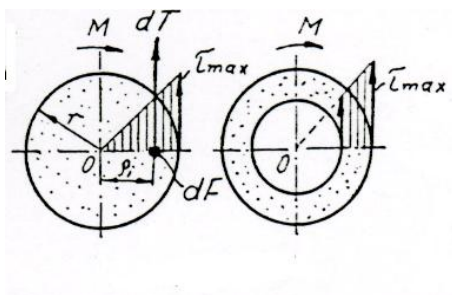
Като разделим почленно изразите (11.5.) и (11.6.) се получава

$$\frac{\tau}{\tau_i} = \frac{r}{\rho_i}, \quad (11.7.)$$

откъдето
$$\tau_i = \tau \frac{\rho_i}{r}. \quad (11.8.)$$



От уравнение (11.7.) се вижда, че тангенциалните напрежения в точки от напречното сечение се правопропорционални на разстоянията на тези точки до оста на вала. Въз основа на зависимостта (5.8.) на фиг.11.5 са показани диаграмите на тангенциалните напрежения при усукване на кръгово и пръстеновидно напречно сечение. При $\rho_i = 0$ няма напрежение и деформации, а при $\rho_i = \rho_{max} = r$ - напреженията и деформациите са максимални. Вижда се, че тангенциалните напрежения са перпендикулярни на радиуса и че във всички точки, намиращи се на еднакво разстояние от центъра, напреженията са еднакви.



Фиг.11.5

Прието е при усукване, когато се говори за напрежение на усукване, винаги да се разбира максималното тангенциално напрежение.

За дадено напречно сечение на вал, подложен на усукване, усукващият момент е равен на сумата от моментите на елементарните сили $dT = \tau_i dF$ спрямо центъра на сечението,

$$M_{yc} = \int_{(F)} dM_{yc} = \int_{(F)} dT \rho_i = \int_{(F)} \tau_i \rho_i dF \quad (11.9.)$$

След замесване на τ_i от уравнение (5.6.) се получава

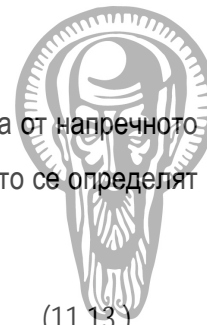
$$M_{yc} = \int_{(F)} G \rho_i \frac{d\varphi}{dx} \rho_i dF = G \theta \int_{(F)} \rho_i^2 dF = G J_C \theta. \quad (11.10.)$$

Величините G и θ не зависят от ρ_i , затова се изваждат пред интеграла, а $\int_{(F)} \rho_i^2 dF$ е полярният инерционен момент на сечението. От уравнение (5.10.) за относителният ъгъл на усукване се получава

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{yc}}{G J_C}. \quad (11.11.)$$

Чрез заместване на (5.11.) в (5.6.) се получава

$$\tau_i = G \rho_i \frac{M_{yc}}{G J_C} = \frac{M_{yc}}{J_C} \rho_i. \quad (11.12.)$$



Това уравнение позволява да се определи тангенциалното напрежение във всяка точка от напречното сечение при известни M_{yc} и J_C . Максималното напрежение в крайните точки на сечението се определят от израза

$$\tau_{\max} = \frac{M_{yc}}{J_C} r = \frac{M_{yc}}{\frac{J_C}{r}} = \frac{M_{yc}}{W_C}. \quad (11.13.)$$

Отношението $W_C = \frac{J_C}{r}$, както е известно, се нарича полярен съпротивителен момент на сечението.

За определяне на ъгълът на усукване φ се използва уравнение (5.10.), от което се получава

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{yc}}{GJ_C} dx. \quad (11.14.)$$

При постоянни G и J_C ъгълът на усукване на вала между двете му крайни сечения е

$$\varphi = \frac{1}{GJ_C} \int_0^l M_{yc} dx. \quad (11.15.)$$

В случай когато усукващият момент е постоянен по дължината на вала

$$\varphi = \frac{M_{yc} l}{GJ_C}. \quad (11.16.)$$

Величината GJ_C се нарича коравина на вала при усукване. Тя характеризира съпротивлението на вала против усукване.

В най-общия случай, когато сеченията по дължината на вала и усукващите моменти са променливи, пълният ъгъл на усукване се определя от израза

$$\varphi = \frac{1}{G} \int_0^l \frac{M_{yc}(x)}{J_c(x)} dx. \quad (11.17.)$$

11.3. Якостно и деформационно условие при усукване

Якостното условие, на което трябва да отговаря вал, подложен на усукване, е максималното тангенциално напрежение в застрашеното напречно сечение да не превишава допустимото тангенциално напрежение за дадения материал, т.е.

$$\tau_{\max} = \tau_{yc} = \frac{M_{yc}}{W_C} \leq \tau_{\text{доп}}. \quad (11.18.)$$

За оразмеряване и определяне на допустимото натоварване от (3.18.) съответно се получават изразите:



$$W_C \geq \frac{M_{yc}}{\tau_{\text{дон}}}, \quad (11.19.)$$

$$M_{yc} \leq W_C \tau_{\text{дон}}. \quad (11.20.)$$

Ако диаметърът на вала не е постоянен, може да се получи така, че максималните тангенциални напрежения да възникнат не там, където усукващият момент е максимален. В такива случаи за определяне на застрашеното сечение е необходимо да се начертае диаграма на усукващите моменти и съответно за всеки участък на вала да се изчислят съответните тангенциални напрежения.

Допустимото напрежение на усукване се приема, както следва:

за пластични материали: $\tau_{\text{дон}} = \frac{\tau_s}{\nu_s};$

за крехки материали: $\tau_{\text{дон}} = \frac{\tau_B}{\nu_B},$

където τ_s и τ_B са границата на провлачване и граничната якост при усукване;

ν_s и ν_B - допустимите коефициенти на сигурност.

Деформационното условие за валове, подложени на усукване, е относителният ъгъл на усукване да не надвишава допустимата му стойност т.е.

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} \leq \theta_{\text{дон}}. \quad (1.21.)$$

Големината на допустимия ъгъл на усукване зависи от предназначението на вала и предписаните технически условия.

11.4. Потенциална енергия на деформацията при усукване

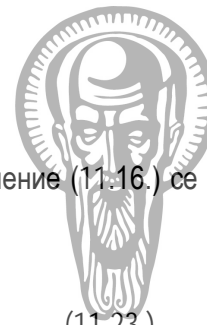
При определяне потенциалната енергия на деформацията при усукване ще считаме, че вала работи при напрежения не превишаващи границата на еластичността (фиг.11.6). В този случай работата на външните сили A , необходима за усукване на вала, е равна на количеството потенциална енергия U , съдържаща се във вала,

$$A = U.$$

Работата на външните сили е равна на лицето на щрихованата площ в диаграмата на усукване, а именно

$$A = U = \frac{1}{2} M_{yc} \varphi, \quad (11.22.)$$

където M_{yc} е усукващият момент;



φ - ъгълът на усукване на вала.

Като заместим в уравнение (5.22.) вместо φ или M_{yc} тяхната стойност от уравнение (11.16.) се получава

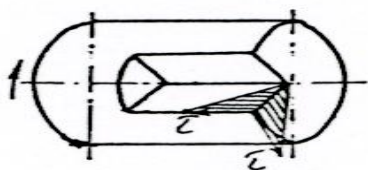
$$U = \frac{M_{yc}^2 l}{2GJ_c} = \frac{GJ_c}{2l} \varphi^2. \quad (11.23.)$$

При променливи стойности на M_{yc} и J_c по дължината на вала, потенциалната енергия на деформацията се определя от израза

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int \frac{M_{yc}^2}{GJ_c} d\varphi. \quad (11.24.)$$

11.5. Напрегнато състояние при усукване

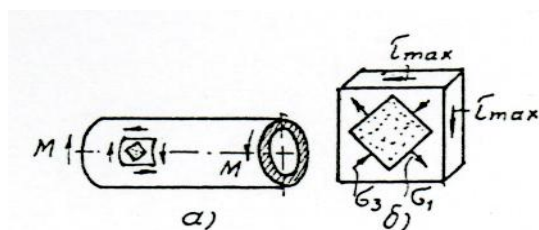
Както е известно в напречните сечения на вал подложен на усукване се възбуждат тангенциални напрежения. От закона за реципрочност на тангенциалните напрежения следва, че по ръбовите площадки на радиалните сечения действат също така тангенциални напрежения, които са разпределени в радиално направление по същия закон, както напреженията τ (фиг.11.7).



Фиг.11.7

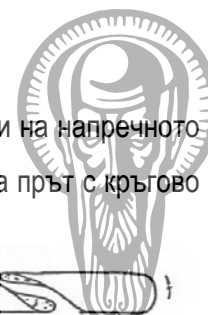
Наличието на тези напрежения обяснява факта, че при валове с влакнест строеж, имащи малко съпротивление в надлъжно направление, отколкото в напречното, разрушаването започва с появяване на надлъжни пукнатини по повърхността.

За повърхностен елемент от вал, подложен на усукване, взаимното разположение на главните площадки и площадките, в които действат максималните тангенциални напрежения е показан на фиг.11.8а, а отделно този елемент е показан на фиг.11.8б.

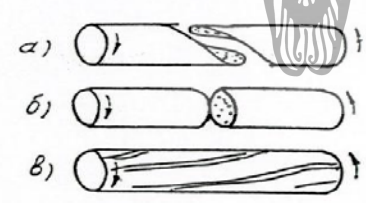


Фиг. 11.8

$$\text{Главните напрежения имат следните стойности: } \sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{\max}; \sigma_2 = 0. \quad (10.25.)$$



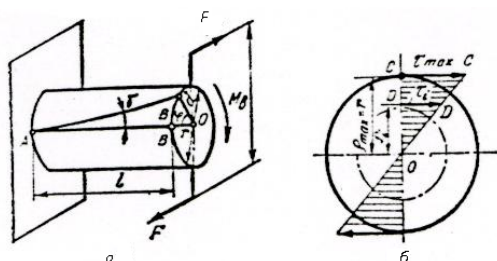
Максималните тангенциални напрежения възникват в площадки, принадлежащи на напречното и радиално сечение на вала. Многобройни опити са показали, че при чисто усукване на прът с кръгово напречно сечение разрушаването му започва винаги от повърхностния слой, като характерът му е твърде различен при различните материали. При чугунени валове най-често се образуват пукнатини във формата на винтови линии, които по повърхността са наклонени под ъгъл 45° (фиг.11.9а).



Фиг. 11.9

Разрушаването в този случай се дължи на главните опънови напрежения σ_1 , срещу които чугунът се съпротивлява много по-малко, отколкото срещу σ и $\tau_{ус}$. Стоманени валове се разрушават в напречните сечения, перпендикулярни на оста на вала (фиг.11.9б), тъй като опъновите напрежения за тези валове са по-малко опасни отколкото тангенциалните напрежения. При дървени валове, разрушаването започва с образуване на надлъжни пукнатини (фиг.11.9в), в следствие действието на тангенциалните напрежения в надлъжните радиални сечения.

Пример 11.1 Вал с кръгово напречно сечение (фиг.11.10а) с диаметър $d=40\text{ mm}$ и дължина $l=1,2\text{ m}$ е подложен на усукване от момент $M_B=260\text{ Nm}$.



Да се определят:

- а) Максималното тангенциално напрежение и напрежението в точка D , отстояща на разстояние $\rho_D=15\text{ mm}$ от центъра на вала.
- б) Ъгълът на сместване γ и ъгълът на усукване φ , ако модулът на ъглова деформация $G=8,3 \cdot 10^{10}\text{ Pa}$.
- в) Деформацията BB' .

Решение

Максималното тангенциално напрежение се определя от формулата

$$\tau_{\max} = \frac{M_{yc}}{W_p}$$

където

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14(40 \cdot 10^{-3})^3}{16} = 12,56 \cdot 10^{-6}\text{ m}^3.$$

Следователно

$$\tau_{\max} = \frac{M_{yc}}{W_p} = \frac{260}{12,56 \cdot 10^{-6}} = 20,7 \cdot 10^6\text{ Pa} = 20,7\text{ MPa}.$$

Напрежението в точката D на разстояние $\rho_D=15\text{ mm}$ от оста на сечението се определя от пропорцията



$$\frac{\tau_{\max}}{\tau_D} = \frac{\rho_{\max}}{\rho_D},$$
$$\tau_{\max} = \tau_D \frac{\rho_{\max}}{\rho_D} = 2,07 \frac{15 \cdot 10^{-3}}{\frac{40 \cdot 10^{-3}}{2}} = 15,6 \text{ MPa}.$$

Ъгълът на сместване е

$$\gamma = \frac{\tau_{\max}}{G} = \tau_D \frac{\rho_{\max}}{\rho_D} = \frac{20,7 \cdot 10^{-6}}{8,3 \cdot 10^{10}} = 2,51 \cdot 10^{-4} \text{ rad},$$

а ъгълът на усукване –

$$\varphi = \frac{M_{yc} l}{GJ_P} = \frac{260 \cdot 1,2}{8,3 \cdot 10^{10} \frac{3,14(40 \cdot 10^{-3})^4}{32}} = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ rad}.$$

Деформацията BB' е дъга на централния ъгъл φ и се определя с формулата

$$BB' = \rho_{\max} \varphi = \frac{40}{2} 1,5 \cdot 10^{-2} = 30 \cdot 10^{-2} \text{ mm}.$$

Пример 2. По якостното и деформационното условие да се определи диаметърът на стоманен вал, който предава мощност $P=85 \text{ kW}$ и се върти с ъглова скорост $\omega=12,5 \text{ 1/s}$. При изчисленията да се приемат : $\tau_{d,yc} = 38 \text{ MPa}$, $\theta_{don} = 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ rad/m}$ и $G=8,3 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$.

Решение

Предаваният от вала въртящ момент се определя от израза

$$M_B = M_{yc} = \frac{P}{\omega} = \frac{85 \cdot 10^3}{12,5} = 6800 \text{ Nm}.$$

От якостното изчислително условие се определя необходимият полярен съпротивителен момент

$$W_P = \frac{M_{yc}}{\tau_{d,yc}} = \frac{6800}{38 \cdot 10^6} = 179 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3,$$

а от формулата за кръговото напречно сечение – диаметърът на вала

$$d = \sqrt{\frac{16W_P}{\pi}} = \sqrt{\frac{16 \cdot 179 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 9,52 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 9,52 \text{ cm}.$$

От деформационното уравнение се определя необходимият полярен инерционен момент

$$J_P = \frac{M_{yc}}{G\theta_{don}} = \frac{6800}{8,3 \cdot 10^{10} \cdot 0,9 \cdot 10^{-2}} = 910 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4.$$

Търсеният диаметър на вала е

$$d = \sqrt[4]{\frac{32J_P}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 910 \cdot 10^{-8}}{3,14}} = 9,88 \text{ cm}.$$

Избира се по-големият диаметър и се закръглява до най-близкия стандартен по-голям диаметър, $d=100 \text{ mm}$.



12. Теории за граничното напрегнато състояние

12.1. Основни понятия

Всяко напрегнато състояние, при което в дадена част се появяват пукнатини за крехките материали или значителни остатъчни деформации за пластичните материали, се нарича гранично или опасно състояние, а стойността на напрежението при това състояние се нарича гранично или опасно напрежение.

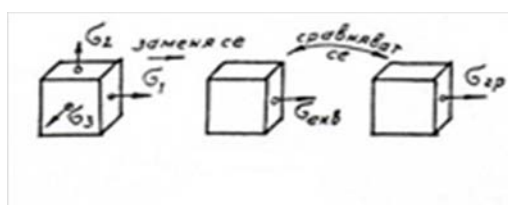
При едномерно напрегнато състояние, например чист опън или натиск, опасното състояние би настъпило тогава, когато максималното нормално напрежение достигне съответното гранично (опасно) напрежение, което се определя лесно и достатъчно точно експериментално. Следователно в тези случаи опасното състояние може да се избегне със сигурност, ако е изпълнено якостното условие

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{дох}} \quad (12.1.)$$

където $\sigma_{\text{дох}} = \frac{\sigma_{\text{сп}}}{V}$ е допустимото напрежение.

Когато има сложно напрегнато състояние (двумерно или тримерно) се въвежда понятието еквивалентно ($\sigma_{\text{екв}}$) или редуцирано ($\sigma_{\text{ред}}$) напрежение, което представлява напрежението при едномерно напрегнато състояние, равноопасно на зададеното сложно напрегнато състояние.

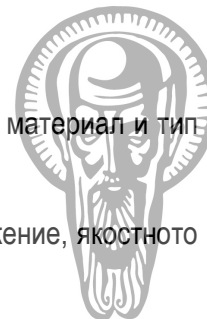
От определението е ясно, че еквивалентното напрежение не е някаква действително съществуваща величина. Големината на еквивалентното напрежение зависи не само от зададеното напрегнато състояние, т.е. от съответните му главни напрежения, но и от приетия за изчисление признак на равноопасността на напрегнатото състояние. За условията, при които даденото напрегнато състояние и въобразяемото просто напрегнато състояние са равноопасни или еквивалентни, съществуват различни теории, наречени теории за граничното напрегнато състояние.



Фиг.12.1

В зависимост от приетата теория даденото напрегнато състояние се замества с еквивалентно едномерно напрегнато състояние и съответното напрежение се сравнява с граничното за дадения материал (фиг.12.1).

Само чрез експериментална проверка на оразмерени части със $\sigma_{\text{екв}}$, определено по една или друга теория, може да се установи доколко тази теория е правилна и приемлива или е негодна.



При всеки отделен случай трябва да се използва онази теория, която за даден материал и тип на напрегнатото състояние в опасното сечение дава най-достоверни резултати.

Независимо от приетата теория, след определянето на еквивалентното напрежение, якостното условие има вида

$$V = \frac{\sigma_{сп}}{\sigma_{екв}} \geq V_{доп} , \quad (12.2)$$

или
$$\sigma_{екв} \leq \sigma_{доп} . \quad (12.3)$$

Тук ще разгледаме някои от съществуващите теории, които намират приложение при съвременните якостни пресмятания.

12.2. Първа теория за граничното напрегнато състояние или теория за максималното главно нормално напрежение

Съгласно тази теория граничното състояние за даден материал настъпва, когато максималното нормално напрежение достигне една определена стойност. Следователно якостното условие ще бъде

$$\sigma_{екв}^I = \sigma_1 \leq \sigma_{дох} . \quad (12.4)$$

Тази теория държи сметка само за най-голямото опъново напрежение или само за най-голямото натисково напрежение. Главният и недостатък е, че тя не взема пред вид останалите две главни напрежения. Резултатите, получени по нея, съвпадат задоволително с експерименталните резултати, когато едното от главните напрежения е значително по-голямо по абсолютна стойност от другите две. Използва се много рядко само за някои крехки материали.

12.3. Втора теория за граничното напрегнато състояние или теория за максималната линейна деформация

Според тази теория граничното състояние за даден материал настъпва, когато максималната линейна деформация достигне една опитно определена стойност. Съгласно тази теория всички напрегнати състояния, които имат еднакви максимални линейни деформации са еквивалентни.

За тримерно напрегнато състояние, когато главните деформации $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$, общото условие, отговарящо на втората теория е

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 < \varepsilon_0 , \quad (12.5)$$

където ε_0 е граничната стойност на относителното удължение, определена опитно при изпитване на опън.



При определянето на ε_1 и ε_0 се използват известните зависимости на Хук:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)), \quad (12.6.)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma''_{екв}}{E}. \quad (12.7.)$$

От тези условия следва непосредствено, че съгласно втората теория:

$$\sigma''_{екв} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3), \quad (12.8.)$$

а якостното условие ще бъде:

$$\sigma''_{екв} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{дох}. \quad (12.9.)$$

Тази теория дава задоволително добри резултати, съвпадащи с опитните изследвания само за крехки материали за напрегнати състояния от типа $\sigma_1 > 0$ и $\sigma_3 < 0$. За пластични материали тя дава неверни резултати.

12.4. Трета теория за граничното напрегнато състояние или теория за максималното тангенциално напрежение

Съгласно тази теория граничното състояние за даден материал настъпва, когато максималното тангенциално напрежение достигне една опитно определена стойност.

При тримерно напрегнато състояние, за което $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, както е известно, максималното тангенциално напрежение се определя от израза

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (12.10.)$$

Якостното условие при тази теория има вида:

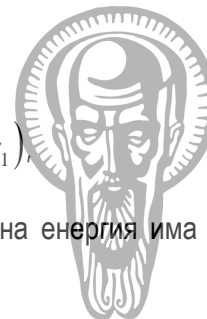
$$\sigma_{eul}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{дох}. \quad (12.11.)$$

Очевиден недостатък на тази теория е пренебрегването на второто главно напрежение σ_2 . Експерименталните проверки показват, че при изчисления по тази теория за пластични материали се получават добри резултати, а за крехките материали, тя е неприложима.

12.5. Четвърта теория за граничното напрегнато състояние или енергетична теория

Съгласно тази теория граничното състояние за даден материал настъпва, когато специфичната потенциална енергия за промяна на формата достигне една опитно определена стойност.

Според тази теория всички напрегнати състояния с еднаква специфична потенциална енергия за промяна на формата



$$\Omega_f = \frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)$$

са еквивалентни. За еквивалентно едномерно напрегнато състояние тази потенциална енергия има стойност

$$\Omega_f = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{екв}^{IV^2}$$

От тук се получава израза за еквивалентното нормално напрежение съгласно четвъртата теория, а именно:

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1)} \leq \sigma_{дох} \quad (12.12.)$$

или

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{2}} \leq \sigma_{дох} \quad (12.13.)$$

При двумерно напрегнато състояние, замествайки със съответните главни напрежения със σ_x , σ_y и τ_{xy} се получава

$$\sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq \sigma_{дох} \quad (12.14.)$$

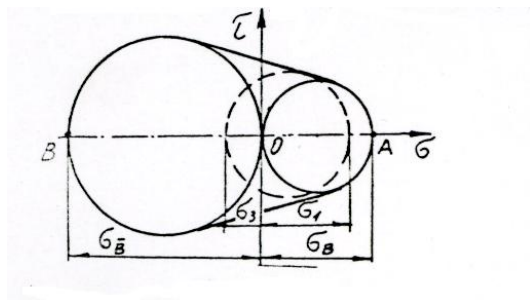
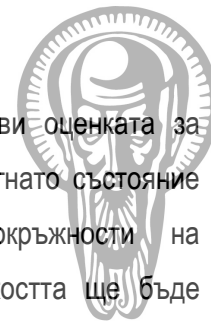
Енергетичната теория добре се потвърждава от опитите с жилаво пластични материали и намира широко приложение в практиката.

12.6. Обобщена теория на Мор

При всички разгледани досега теории за настъпване на граничното напрегнато състояние се приема един от следните фактори: напрежение, деформация, енергия.

Теорията на Мор не взема под внимание междинното главно напрежение σ_2 . Всяко напрегнато състояние може да се изобрази с помощта на окръжностите на напреженията, построени по дадени главни напрежения σ_1 и σ_3 . При положение, че σ_1 и σ_3 достигат стойности, съответстващи на граничното напрегнато състояние, то окръжностите на Мор се наричат гранични.

На фиг.8.14 са показани две гранични окръжности. Окръжността 1 с диаметър ОА, равен на якостта на опън, съответства на чист опън. Окръжността 2 съответства на чист натиск и има диаметър ОВ, равен на якостта на натиск. Междинните гранични напрегнати състояния съответстват на редица междинни гранични окръжности. Обвивката на тези окръжности се нарича гранична крива и ограничава якостната област.



При наличие на граничните криви оценката за якостта на материала при дадено напрегнато състояние се прави чрез построяване на окръжности на напреженията по дадените σ_1 и σ_3 . Якостта ще бъде осигурена, ако тези окръжности бъдат в областта между граничните криви.

Еквивалентното напрежение и якостното условие съгласно теорията на Мор има следния вид:

$$\sigma_{екв}^M = \sigma_1 - \nu\sigma_3 \leq \sigma_{дох}, \quad (8.15.)$$

където $\nu = \frac{\sigma_{s,on}}{\sigma_{s,n}}$ е коефициент на сигурност за пластични материали;

$\nu = \frac{\sigma_{b,on}}{\sigma_{b,n}}$ е коефициент на сигурност за крехки материали;

или $\nu = \frac{\sigma_{d,on}}{\sigma_{d,n}}$ е коефициент на сигурност за всеки материал.

Съществуват и други теории за граничното състояние, които могат да бъдат намерени в специализираната литература.

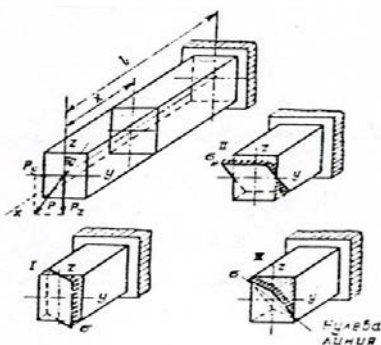
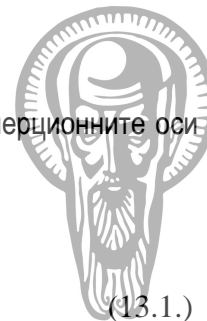
13. Сложна съпротива

Когато външните сили, действащи върху тялото, са разположение така, че в дадено напречно сечение възникват едновременно няколко вътрешни усилия, се казва, че тялото е подложено на сложна съпротива.

От различните комбинации на сложна съпротива ще разгледаме най-често срещаните.

13.1. Наклонено огъване

Наклонено огъване имаме, когато равнината на натоварването минава по оста на натоварената греда, но не минава през някоя от главните инерционни оси на напречното сечение. Като пример за определяне на напреженията и деформациите при наклонено огъване да разгледаме конзолна греда с правоъгълно напречно сечение с размери b , h и дължина l , натоварена със сила P , лежаща в равнината на челното напречно сечение, сключваща ъгъл α с главната инерционна ос z (фиг.13.1).



Разлагаме силата P на две съставлящи по инерционните оси y и z на напречното сечение на гредата:

$$P_y = P \sin \alpha ,$$

$$P_z = P \cos \alpha .$$

(13.1.)

Всяка от тези съставлящи предизвиква прости огъвания в една от главните плоскости – силата P_y в плоскостта xz , а силата F_z – в плоскостта xy . Следователно наклоненото огъване може да се разглежда като резултат от две прости огъвания в две взаимно перпендикулярни равнини, които минават през главните инерционни оси на напречното сечение.

Вътрешните усилия за произволно сечение на разстояние за разглеждания случай са

- тангенциални усилия: $Q_y = P_y = P \sin \alpha ,$

$$Q_z = P_z = P \cos \alpha ; \quad (13.2.)$$

-огъващи моменти:

$$M_y = P_z x = P x \cos \alpha ,$$

$$M_z = P_y x = P x \sin \alpha . \quad (13.3.)$$

Обикновено тангенциалните напрежения в застрашеното сечение се пренебрегват, защото са много малки в сравнение с нормалните напрежения. Поради това при наклонено огъване, както и при просто огъване за якостните изчисления се вземат пред вид само нормалните напрежения.

Нормалното напрежение в произволна точка M от напречното сечение на гредата се определя въз основа на принципа на зависимостта на действието на силите като алгебрична сума от нормалните напрежения, предизвикани от съставлящите P_y , P_z и P , т.е.

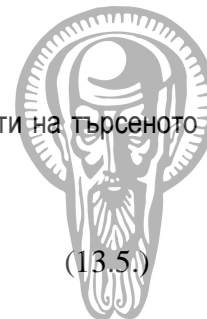
$$\sigma_M = \sigma'_M + \sigma''_M = \frac{M_y}{J_y} z_M + \frac{M_z}{J_z} y_M , \quad (13.4.)$$

където $\sigma'_M = \frac{M_y}{J_y} z_M = \frac{P_z x}{J_y} z_M$ - от съставлящата P_z ;

$$\sigma''_M = \frac{M_z}{J_z} y_M = \frac{P_y x}{J_z} y_M - \text{от съставлящата } P_y.$$

В уравнение (13.4.) напреженията трябва да бъдат заместени с техните знаци, които в повечето случаи се определят лесно – опъновите напрежения имат знак плюс, а натисковите – минус.

За намиране на неутралната линия, която представлява геометричното място на точките в напречното сечение, в което нормалните напрежения са равни на нула, приравняваме на нула



дясната част на уравнение (13.4.), като вместо y_M и z_M поставим текущите координати на търсеното геометрично място y и z , или

$$\frac{M_y}{J_y} z_M + \frac{M_z}{J_z} y_M = 0, \quad (13.5.)$$

откъдето

$$z = -\frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z} y. \quad (13.6.)$$

Тази формула показва, че неутралната линия е права, която преминава през началото на координатната система и има ъглов коефициент, който се определя от израза

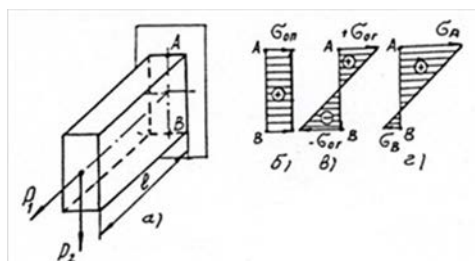
$$k = \operatorname{tg} \beta = -\frac{M_z}{M_y} \frac{J_y}{J_z}. \quad (13.7.)$$

Провисването на наклонено огъване се определя въз основа на принципа на независимостта на действието на силите, чрез геометрично събиране на провисванията в направлението на главните оси, т.е.

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2}, \quad (13.8.)$$

където f_y и f_z са съответно провисванията по осите y и z .

13.2. Огъване и опън(натиск)



фиг.13.2

Много често в практиката се среща сложна съпротива, при която частите са натоварени на едновременно огъване и опън(натиск). Така например конзолната греда, показана на фиг.13.2, е натоварена на опън със сила P_1 и на огъване от силата P_2 . Понеже напреженията при огъване и опън са еднородни – в случая нормални, според принципа на независимостта на

действието на силите те могат да се събират алгебрично. От действието на опъващата сила P_1 във всяко напречно сечение на гредата възникват нормални усилия $N = P_1$, във всички точки на които нормалното напрежение е еднакво, т.е.

$$\sigma_{on} = \frac{N}{F} = \frac{P_1}{F}. \quad (13.9.)$$

Диаграмата на напрежението на огъване в застрашеното сечение е показана на фиг.13.2в.



Под действието на силата P_z в сечението на закрепването, което се намира на разстояние l от десния край, възниква огъващ момент M_y , на който съответства нормално напрежение

$$\sigma_{ог} = \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \frac{F_z l}{W_y}. \quad (13.10.)$$

При едновременното действие на двете сили максималното нормално напрежение в т.А ще бъде

$$\sigma_A = \sigma_{\max} = \sigma_{он} + \sigma_{ог} = \frac{P_1}{F} + \frac{M_y}{W_y} - \text{напрежение на опън,}$$

а в т.В

$$\sigma_B = \sigma_{\min} = \sigma_{он} - \sigma_{ог} = \frac{P_1}{F} - \frac{M_y}{W_y} - \text{напрежение на натиск.}$$

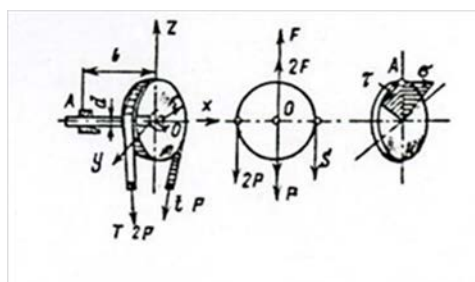
Диаграмата на резултантното напрежение в застрашеното сечение е показана на фиг.13.2.

За материал с еднаква съпротива на опън и натиск якостното условие е

$$|\sigma_{\max}| \leq \sigma_{дон}.$$

13.3. Огъване и усукване

Този случай на натоварване се среща най-често в различните видове валове-трансмисионни, редуктарни и др. Да разгледаме вал, в края на който е поставена шайба (фиг.7.3).



Фиг.7.3

Опъването на водещата част на ремъка е $T = 2P$ а във водимата е $t = P$, където P е действащата сила. Като се пренесат силите T и t в центъра на тежестта на вала O , се получават две двойци сили с моменти Pr и $2Pr$, където r е радиусът на ремъчната шайба и две сили P и $2P$. Силите са насочени надолу и следователно огъват вала с огъващ момент $M_{ог} = 3Pl$, където l е дължината на конзолната част на вала, при което в него ще се появят напрежения на

огъване. Двойцата сили $P-P$ и $2P-2P$ имат различни посоки на въртене като тяхната равнодействаща двойца ще действа в равнината yz и ще има момент $M_{yc} = Pr$, който ще усуква вала.

Максималното нормално напрежение на огъване и максималното тангенциално напрежение на усукване се получават в точките, които лежат на повърхността на вала:



$$\sigma_{\max} = \sigma_{oz} = \frac{M_{oz}}{W_y} = \frac{M_{oz}}{0,1d^3}, \quad (13.11.)$$

$$\tau_{\max} = \tau_{yc} = \frac{M_{yc}}{W_c} = \frac{M_{yc}}{0,2d^3}, \quad (13.12.)$$

където d е диаметърът на вала.

При това напрегнато състояние, което е двумерно, определянето на главните напрежения става от уравнението

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (13.13.)$$

Въз основа на главните напрежения може да се напише якостното условие според приетата теория на напрегнатото състояние. Така например според теорията за максималното тангенциално напрежение (трета якостна теория)

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_{дон}, \quad (13.14.)$$

или чрез съответните моменти

$$\sqrt{\left(\frac{M_{or}}{W_y}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{yc}}{W_p}\right)^2} \leq \sigma_{дон}. \quad (13.15.)$$

Понеже за кръгово и пръстеновидно сечение $W_p = 2W_y$, следва

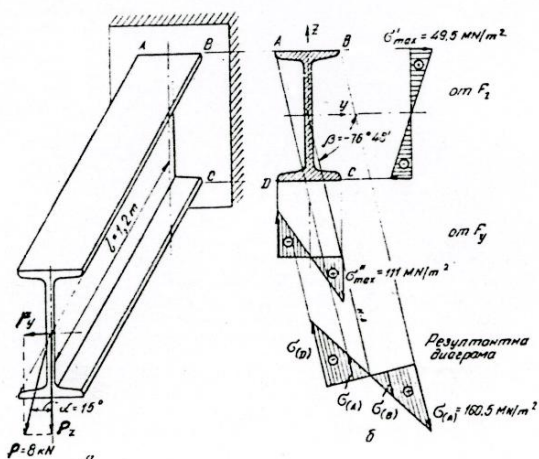
$$\frac{1}{W_y} \sqrt{M_{oz}^2 + M_{yc}^2} \leq \sigma_{дон}. \quad (13.16.)$$

Като означим $\sqrt{M_{oz}^2 + M_{yc}^2} = M_{екв}^{III}$, което представлява еквивалентният момент по трета якостна теория, получаваме

$$\frac{M_{екв}^{III}}{W_y} \leq \sigma_{дон}. \quad (13.17.)$$

По този начин якостното условие за едновременно огъване и усукване е както при огъване с тази разлика, че огъващият момент се замества с еквивалентния момент.

Пример 13.1 Конзолна греда I20 с дължина $l = 1,2 \text{ m}$ (фиг.13.4а) е натоварена в края със сила $P = 8 \text{ kN}$, която сключва ъгъл с вертикалната ос на профила. Да се начертаят диаграмите на нормалните напрежения за застрашеното сечение и се определи пълното провисване на свободния край на гредата.



Решение

Тъй като директрисата на силата P не съвпада с нито една от главните инерционни оси на напречното сечение, гредата е подложена на наклонено огъване.

Силата P се разлага на две съставлящи:

$$P_z = P \cos \alpha = 8 \cos 15^\circ = 7,47 \text{ kN};$$

$$P_y = P \sin \alpha = 8 \sin 15^\circ = 2,07 \text{ kN};$$

които предизвикват огъване на гредата във вертикалната и хоризонталната равнина.

За застрашеното сечение на гредата (в местото на запъването) огъващите моменти от съставлящите P_y и P_z са съответно:

$$\max M_y = P_z l = 7,47 \cdot 1,2 = 8,94 \text{ Nm};$$

$$\max M_z = P_y l = 2,07 \cdot 1,2 = 2,48 \text{ Nm}.$$

Съпротивителните моменти на сечението спрямо осите y и z се определят от съответните таблици. За I20 се отчита $W_y = 181 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$, $W_z = 22,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$.

Максималните нормални напрежения от съставлящите P_y и P_z са съответно:

$$\sigma'_{\max} = \frac{\max M_y}{W_y} = \frac{8,94 \cdot 10^3}{181 \cdot 10^{-6}} = 49,5 \text{ MPa};$$

$$\sigma''_{\max} = \frac{\max M_z}{W_z} = \frac{2,48 \cdot 10^3}{22,4 \cdot 10^{-6}} = 111 \text{ MPa}.$$

Диаграмите на нормалните напрежения са построени на фиг.7.4б.

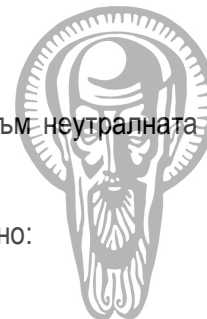
За построяване на резултантната диаграма на нормалните напрежения се определя

положението на неутралната ос чрез определяне на ъгъл β с формулата $\text{tg} \beta = -\text{tg} \alpha \frac{J_y}{J_z}$.

При $\alpha = 15^\circ$, $J_y = 1810 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ и $J_z = 112 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$ се получава

$$\text{tg} \beta = -\text{tg} 15^\circ \frac{1810 \cdot 10^{-8}}{112 \cdot 10^{-8}} = -4,26, \text{ откъдето } \beta = -76^\circ 48'.$$

Положението на неутралната линия се определя, като се завърти положителната полуос y по посока на въртенето на часовниковата стрелка (понеже ъгълът β е отрицателен) на ъгъл $76^\circ 48'$.



Резултантната диаграма на напреженията се построява по перпендикуляра към неутралната линия.

Нормалните напрежения в ръбовите точки на застрашеното сечение са съответно:

$$\sigma_A = \sigma'_{\max} - \sigma''_{\max} = 49,5 - 111 = -61,5 \text{ MPa (натиск);}$$

$$\sigma_B = \sigma'_{\max} + \sigma''_{\max} = 49,5 + 111 = 160,5 \text{ MPa (опън);}$$

$$\sigma_C = -\sigma'_{\max} + \sigma''_{\max} = -49,5 + 111 = 61,5 \text{ MPa (опън);}$$

$$\sigma_D = -\sigma'_{\max} - \sigma''_{\max} = -49,5 - 111 = -160,5 \text{ MPa (натиск).}$$

Следователно максималното напрежение

$$|\sigma_{\max}| = 160,5 \text{ MPa.}$$

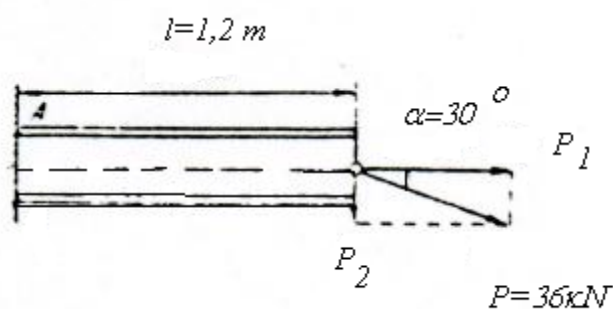
Провисванията на свободния край на гредата във вертикалната и хоризонталната плоскост са съответно

$$f_z = \frac{P_z l}{3EJ_y} = \frac{7,47 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{3,2 \cdot 10^{11} \cdot 1810 \cdot 10^{-8}} = 0,825 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0,825 \text{ mm};$$

$$f_y = \frac{P_y l}{3EJ_z} = \frac{2,07 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{3,2 \cdot 10^{11} \cdot 112 \cdot 10^{-8}} = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,7 \text{ mm},$$

а общото провисване е геометричен сбор от оделните провисвания

$$f = \sqrt{f_y^2 + f_z^2} = \sqrt{3,7^2 + 0,825^2} = 3,78 \text{ mm}.$$



Фиг. 13.5.

Решение

Разлага се силата P на две съставлящи:

$$P_z = P \sin 30 = 36 \cdot 0,5 = 18 \text{ kN};$$

$$P_y = P \cos 30 = 36 \cdot 0,867 = 31,2 \text{ kN}.$$

Пример 13.2. Да се избере Т-образна греда (фиг.13.5) с дължина $l = 1,2 \text{ m}$, ако в края е натоварена със сила $P = 36 \text{ kN}$, която сключва ъгъл $\alpha = 30^\circ$ с оста и. Да се приеме $\sigma_{\text{дон}} = 160 \text{ MPa}$.



Максималният огъващ момент в мястото на запъването е

$$M_{oz} = P_y l = 18,1,2 = 21,6 \text{ kNm}.$$

Максималното нормално напрежение е

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{oz}}{W_y} + \frac{P_y}{F} \leq \sigma_{\text{дон}}.$$

Като се заместят известните величини, се получава уравнението

$$\frac{21,6 \cdot 10^3}{W_y} + \frac{31,2 \cdot 10^{-3}}{F} \leq 160 \cdot 10^6,$$

в което неизвестни са W_y и F .

Поради това, че не се знае аналитичната зависимост между W_y и F , задачата се решава, като се пренебрегне опъновото напрежение, предизвикано от силата P_y и се определи номера на профила само от нормалното напрежение на огъване.

Следователно необходимият съпротивителен момент е

$$W_y = \frac{M_{oz}}{\sigma_{\text{дон}}} = \frac{21,6 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^{-6}} = 137 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3.$$

От таблицата за стандартни профили се избира стандартен профил I18 със следните данни: $W_y = 148 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$ и $F = 23,8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$.

Обикновено профилът се избира по-голям, защото е пренебрегнато напрежението от опъновата сила P_y .

Определяне на максималното нормално напрежение, което да се сравни с допустимото

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{oz}}{W_y} + \frac{P_y}{F} = \frac{21,6 \cdot 10^3}{148 \cdot 10^{-6}} + \frac{31,2 \cdot 10^3}{23,8 \cdot 10^{-4}} = 159,1 \text{ MPa}.$$

Понеже $\sigma_{\max} = 159,1 \text{ MPa} < \sigma_{\text{дон}} = 160 \text{ MPa}$, търсеният профил е добре подбран. В противен случай се подбира по-голям.

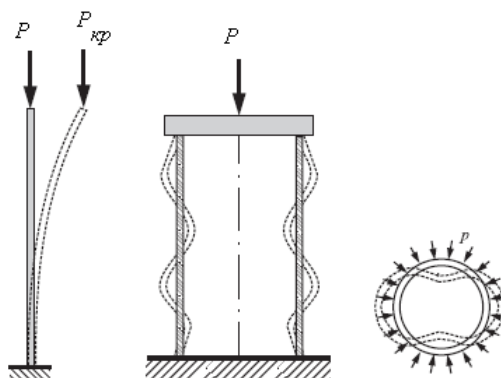


14. Устойчивост на конструктивните елементи

14.1. Основни понятия

Под действие на външните сили твърдите тела се деформират по определен начин в зависимост от закрепването им и от големината на силите. Съществуват форми на деформиране на телата, които при определени условия с нарастване на натоварването над някакво критично ниво, се превръщат в неустойчиви равновесни форми.

При наличието на малки смущаващи фактори, деформируемото твърдо тяло преминава от неустойчивата си форма в друга устойчива равновесна форма. Примери за това са измятането на греда подложена на огъване и изкълчването на тънкостенни цилиндри под действието на осов натиск или външно налягане.



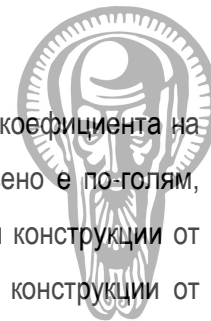
Фиг.14.1

Разглеждаме загубата на устойчивост на центрально натиснат прът. (фиг. 14.1). Когато силата на натиск P е по-малка от определена критична сила $P_{кр}$, устойчива е праволинейната равновесна форма. При нарастване на натоварването над критичното $P > P_{кр}$, става възможна и друга равновесна форма - криволинейната.

Искълчването на прът представлява внезапното преминаване на натиснатия прът от праволинейната си равновесна форма в криволинейна.

За да осигурим натиснатия прът срещу искълчване е необходимо да дефинираме допустима сила $[P]$, която представлява намалената с коефициент на сигурност срещу загуба на устойчивост $n_{уст}$ критична сила $P_{кр}$

$$[P] = \frac{P_{кр}}{n_{уст}} \quad (14.1)$$

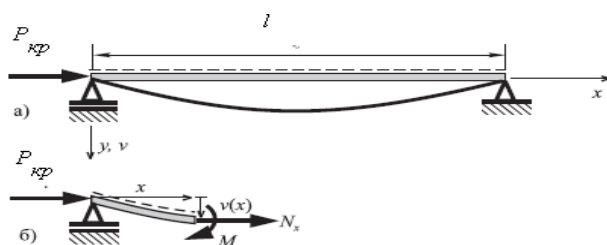


Коефициентът на сигурност срещу загуба на устойчивост $\gamma_{уст}$ е аналогичен на коефициента на сигурност при съставяне на якостните условия за другите натоварвания, но обикновено е по-голям, поради тежките последици от изкълчването. Той е от порядъка 1,8÷3 за строителни конструкции от стомана, 5÷5,5 за строителни конструкции от чугун и 4÷5 за машиностроителни конструкции от стомана. Критично напрежение $\sigma_{кр}$ представлява критичната сила разделена на лицето на напречното му сечение.

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \quad (14.2)$$

14.1. Загуба на устойчивост на натиснати пръти при напрежения под границата на пропорционалност. Формула на Ойлер

Фиг. 14.2



Ойлер е разгледал задачата за натиснат прът, който е в равновесно криволинейно положение. Така е определил минималната сила, при която това равновесно състояние съществува, т.е.

критичната сила $P_{кр}$. Да разгледаме тази задача. При нея прътът е ставно подпрян в двата си края (фиг. 14.2а) и натиснат със сила P , която е достигнала своята критична стойност $P_{кр}$, при която е възможно криволинейното състояние на огъване в равнината xy , т.е. около оста с най-малък инерционен момент z . Отбелязваме, че $J_z = J_{min}$. Оста z е насочена срещу равнината на чертежа и поради това условната линия е нанесена над гредата. Деформацията на пръта се означава с $v(x)$. Разглеждаме равновесието на отделената лява част от деформирания се прът, в напречното сечение с абсциса x има следните вътрешни разрезни усилия:

$$N_x = -P_{кр}; \quad (14.3)$$

$$M_z = -P_{кр}v(x).$$

От диференциалното уравнение на еластичната линия в равнината xy имаме

$$EJ_{min}v''(x) = M_z \quad (14.4)$$

Като заместим M_z и го прехвърлим в лявата част на равенството се получава:

$$E \cdot J_{min}v''(x) + P_{кр}v(x) = 0 \quad (14.5)$$

диференциално уравнение от втора степен и можем да го представим във вида:

$$v''(x) + \alpha^2v(x) = 0 \quad (14.6)$$



Тук коефициентът α представлява $\alpha^2 = \frac{P_{кр}}{EJ_{min}}$

Решението на диференциалното уравнение е:

$$v(x) = C \cos \alpha x + D \sin \alpha x \quad (14.7)$$

където C и D са интеграционни константи, които се определят от условията на закрепване. При $x = 0$ $v \equiv 0$ следва, че $C = 0$ и решението се превръща в $v(x) = D \sin \alpha x$.

При $x = l$ $v \equiv 0$ следва, че $D \sin \alpha l = 0$, което може да е изпълнено или за $D \equiv 0$, или за $\sin \alpha l = 0$.

В първия случай, когато $D \equiv 0$, уравнението на еластичната линия се превръща в нулево, т.е. възможна е само праволинейната форма на пръта.

В случая когато $D \neq 0$ трябва да е изпълнено условието $\sin \alpha l = 0$ и еластичната линия има форма на полуълна от синусоида. Точно този случай представлява случая на изкълчване.

Изразът $\sin \alpha l = 0$ когато $\alpha l = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$ или когато $\alpha = n\pi/l$.

От тук следва, че

$$\frac{P_{кр}}{EJ_{min}} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (14.8)$$

Най-малката критична сила се получава, когато $n = 1$ и тя е:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad (14.9)$$

Тази формула се нарича формула на Ойлер и определя критичната сила за натиснат прът само в случая, когато той е ставно закрепен в двата си края. (Ойлеров случай).

За други случаи на закрепване трябва да се намери решение, като те се приведат към Ойлеровия случай.

14.3. Критична сила при други начини на закрепване

Диференциалното уравнение от задачата на Ойлер е валидно и за други начини на закрепване на натиснатия прът. За да определим интеграционните константи в решението му трябва да разглеждаме всеки отделен случай на закрепване. Тъй като формата на еластичната линия остава винаги част от синусоида можем да си представим формата на изкълчения прът според наложените от опорите ограничения и да търсим дължината, равна на полуълна от синусоида. Тази дължина наричаме ефективна или приведена дължина $l_{ef} = k \cdot l$, където коефициентът k определя начина на закрепването на прътите.



За тази дължина на пръта критичната сила е определена от решението на задачата на Ойлер.

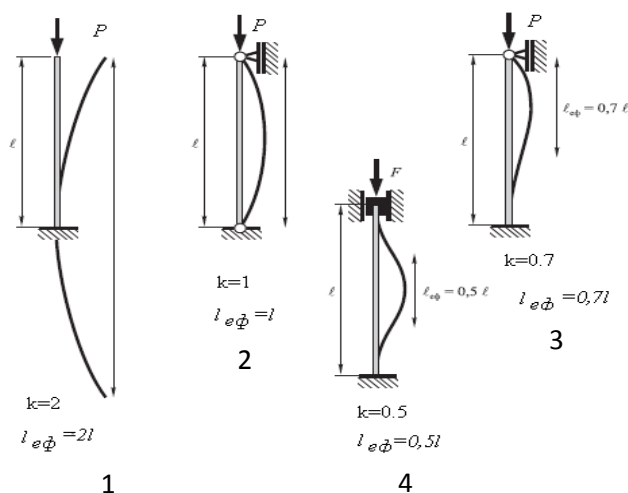
$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l_{ef}^2} \quad (14.10)$$

1случай- Запъване в единия край и свободен втори край

2случай-Ставно подпирание в двата края

3случай -Ставно подпирание в единия край и запъване в другия край

4случай -Запъване в двата края



Фиг.14.3

14.4. Загуба на устойчивост на натиснати пръти при напрежения над границата на пропорционалност. Граница на валидност на формулата на Ойлер

Формулата на Ойлер е валидна докато е валиден закона на Хук, т.е. докато материалът е идеално ластичен. Граничното напрежение за това състояние на материала е границата на пропорционалност σ_p . Така условието за валидност на формулата на Ойлер е:

$$\sigma_{кр} < \sigma_p \quad (14.11)$$

Критичното напрежение е:



$$\sigma_{kp} = \frac{P_{kp}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{F s^2} = \frac{\pi^2 E}{s^2} i_{min}^2 \quad (14.12)$$

Величината $i_{min}^2 = \frac{J_{min}}{F}$ се нарича инерционен радиус на сечението. В случая това е минималният инерционен радиус.

Величината

$$\lambda = \frac{s}{i_{min}} \quad (14.13)$$

се нарича стройност на пръта. Тя е важна негова характеристика, определяща способността му да се изкълчва. В случая това е максималната стройност на пръта. Тя е безразмерна величина.

Критичното напрежение може да се изрази чрез стройността на пръта

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (14.14)$$

От условието за валидност на формулата на Ойлер се получава:

$$\sigma_{kp} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p \quad (14.15)$$

$$\lambda_{max} \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (14.16)$$

Въвеждаме величината гранична стройност, зависеща само от материала на пръта:

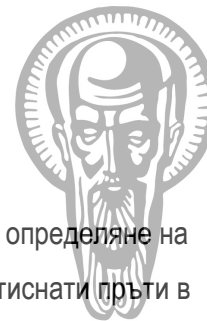
$$\lambda_{гр} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \quad (14.17)$$

Тогава формулата на Ойлер е валидна, когато

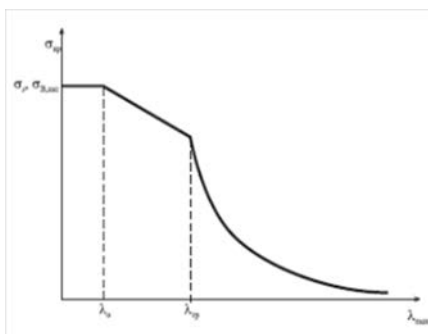
$$\lambda_{max} \geq \lambda_{гр} \quad (14.18)$$

За стомана модулът на еластичност е $E = 200$ GPa, а границата на пропорционалност може да се приеме равна на границата на провлачване $\sigma_p \approx \sigma_s \approx 200$ MPa и тогава за граничната стройност получаваме:

$$\lambda \equiv \lambda_r = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = 100 \quad (14.19)$$



Определяне на критичното напрежение в нееластичната област



Фиг.14.4

Има много експериментални изследвания за определяне на критичните напрежения за изкълчване на натиснати пръти в нееластичната област, т.е. когато $\sigma_{кр} > \sigma_p$ или когато $\lambda_{max} < \lambda_{гр}$.

Резултатите от експерименталните изследвания могат да се апроксимират с регресионни зависимости и дават зависимостта на критичното напрежение от максималната стройност на пръта.

Една от най-популярните формули за определяне на критичното напрежение в нееластичната област е формулата на Ясински-Тетмайер:

$$\sigma_{кр} = \sigma_0(1 - b\lambda) \quad (14.20)$$

където σ_0 и b са емпирично определени коефициенти зависещи от вида на материала. Тези коефициенти могат да се намерят в справочниците. Формулата на Ясински-Тетмайер определя линейна зависимост на критичното напрежение от максималната стройност.

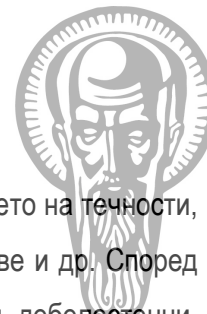
При много малка максимална стройност на пръта не се говори за изкълчване, защото тогава прътът се изражда в масивно тяло, подложено на натиск. Тогава якостта се определя от граничното напрежение на натиск, което е границата на провлачване σ_s при пластичните или границата на якост σ_B при крехките материали. Така можем да изобразим на една диаграма кривите, ограждащи безопасната зона на изменение на натисковото напрежение в зависимост от изменението на максималната стройност.

При максимална стройност $0 \leq \lambda_{max} < \lambda_0$ границата се определя от граничното за материала напрежение на натиск - хоризонтална линия.

При максимална стройност $\lambda_0 \leq \lambda_{max} < \lambda_{гр}$ границата се определя от правата на Ясински-Тетмайер, а при $\lambda_{max} \geq \lambda_{гр}$ - от хиперболата на Ойлер.

За критичното напрежение при натиснат прът можем да направим следното обобщение:

$$\sigma_{кр} = \begin{cases} \sigma_s \text{ или } \sigma_{B,нат}, & \text{ако } \lambda_{max} \leq \lambda_0 \\ \sigma_0(1 - b\lambda_{max}), & \text{ако } \lambda_0 < \lambda_{max} < \lambda_{гр} \\ \frac{\pi^2 E}{\lambda_{max}^2}, & \text{ако } \lambda_{гр} \leq \lambda_{max} \end{cases} \quad (14.21)$$



15. Съдове под налягане

В химическата промишленост се срещат съдове, чиито стени са подложени на налягането на течности, газове и др. Такива съдове са резервоари, реактори, котли, бутилки за сгъстени газове и др. Според дебелината на стените им те се тазделят на два основни класа – тънкостенни и дебелостенни. Разделянето става според определени критерии, утвърдени от практиката.

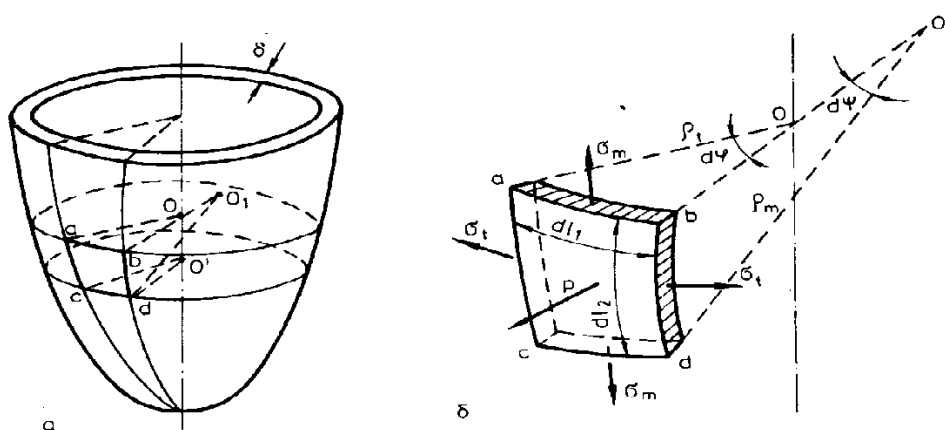
15.1. Тънкостенни съдове под налягане

Тънкостенни съдове са различни видове резервоари, апарати за високо налягане, тръби с малка дебелина на стената. Те имат форма на ротационни тела, имат постоянна дебелина на стената и са натоварени с равномерно разпределено вътрешно налягане.

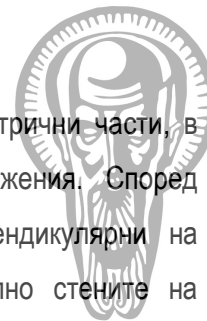
При изследване на напрегнатото-деформационно състояние този клас съдове се схематизират до осовосиметрична тънкостенна черупка. Поради малката дебелина на стената се приема, че нормалните напрежения са равномерно разпределени и липсват огъващи моменти. Теорията, изградена на тази предпоставка, се нарича безмоментна теория на черупките. За тънкостенни съдове се приемат съдове, чиито дебелини δ са по-малки или равни на $1/20$ от по-малкия от двата радиуса на главните кривини.

Определяне на напреженията в стените на тънкостенни съдове, подложени на равномерно разпределено вътрешно налягане p на основа на безмоментовата теория на черупките.

От стените на съда се изрязва безкрайно малък елемент $abcd$ с размери dl_1 и dl_2 с помощта на две меридианни сечения с равнини, минаващи през оста на симетрия и две конусни сечения с върхове, лежащи на същата ос. Означаваме радиусите на главните кривини ρ_m и ρ_t .



Фиг.15.1



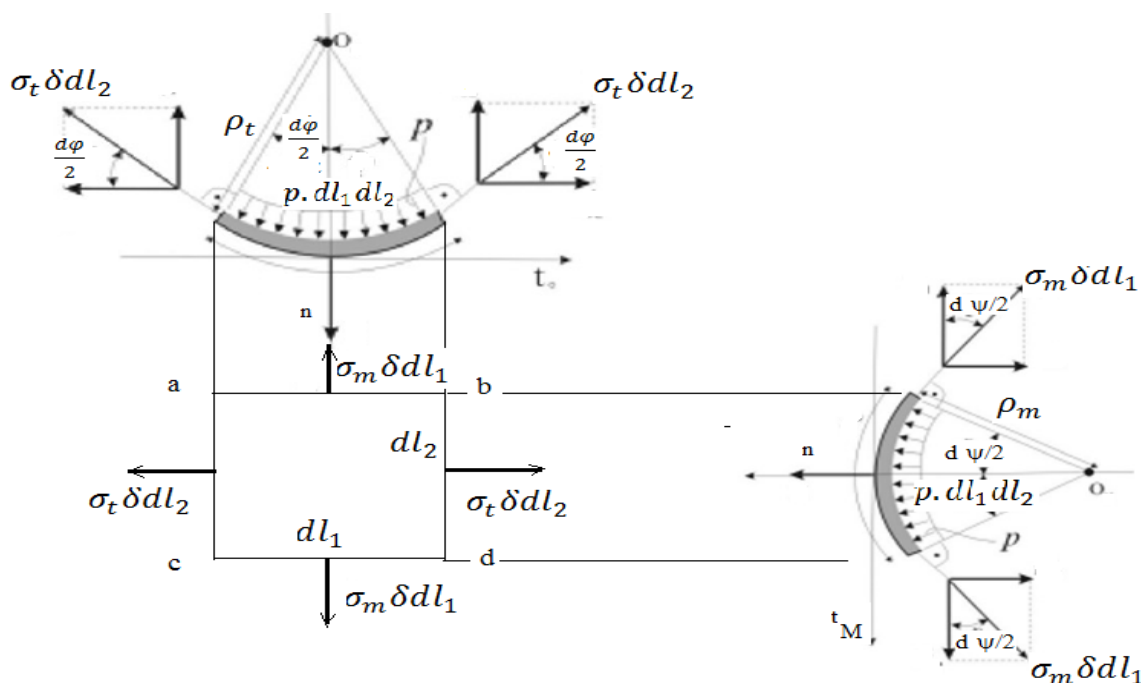
Всяко меридианно сечение разделя съда и действащото натоварване на две симетрични части, в меридианните сечения няма тангенциални усилия и няма тангенциални напрежения. Според теоремата за реципрочност на тангенциалните напрежения в сеченията, перпендикулярни на меридианните, тангенциалните напрежения са също равни на нула. Следователно стените на елемента $abcd$ са главни площадки и върху тях действат главните нормални напрежения - главно окръжностно напрежение σ_t и главно меридианно напрежение σ_m . Съществува и трето нормално напрежение – радиално σ_r , което се променя от $-p$ до 0 , което е незначително в сравнение с другите и при разглеждане на напрегнатото състояние се пренебрегва. Елементарната площадка се разглежда в двумерно напрегнато състояние.

Нека да разгледаме условието за равновесие на елемента.

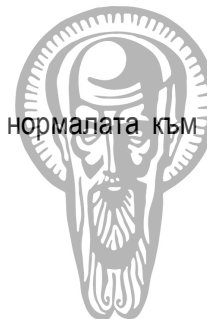
Страните на елемента ab и cd са с дължини dl_1 . Площта на сечението е $S_1 = \delta \cdot dl_1$. Върху него действат силите: $\sigma_m \delta dl_1$ - по тангентата към меридиана.

Страните bc и ad са с дължина dl_2 . Площта на сечението е $S_2 = \delta \cdot dl_2$. Върху него действат силите: $\sigma_t \delta dl_2$ - по тангентата към окръжността.

По вътрешната страна на елемента действат силите, създадени от налягането, които са нормалата към елемента: $p \cdot dl_1 dl_2$.



Фиг.15.2

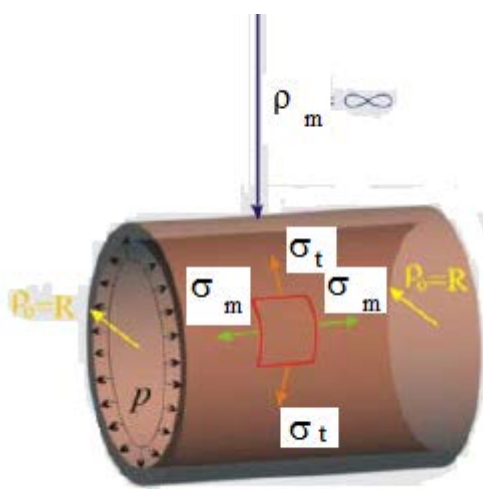


Съставяме уравнението за равновесие на елемента, като силите се проектират по нормалата към повърхността му:

$$p dl_1 dl_2 - 2\sigma_t dl_2 \sin \frac{d\varphi}{2} - 2\sigma_m dl_1 \sin \frac{d\psi}{2} = 0$$

Като приемем, че за малки ъгли $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$, $\sin \frac{d\psi}{2} = \frac{d\psi}{2}$

И като се вземе предвид, че $d\varphi = \frac{dl_1}{\rho_t}$, $d\psi = \frac{dl_2}{\rho_m}$



След незначителни преобразувания се получава уравнение за окръжностното σ_t и меридианното напрежение σ_m , което е уравнението на Лаплас:

$$\frac{p}{\delta} = \frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m}$$

Частни случаи:

Тънкостенен цилиндричен съд без дъно (тръба)

При цилиндричните съдове меридианното направление е права линия, а радиусът на кривина е безкрайност

($\rho_m = \infty$). Окръжностното направление е с постоянна кривина и $\rho_t = R$.

Като заместим тези стойности в уравнението на Лаплас се получава: $\sigma_m = 0$, $\sigma_t = \frac{pR}{\delta} = \frac{pD}{2\delta}$.

Фиг.15.3

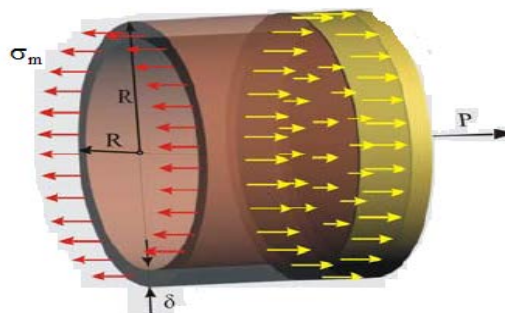
Тънкостенен цилиндричен съд с дъно.

При тези съдове налягането върху дъното формира сила

$$P = p \cdot \pi \cdot R^2$$

Тази сила се уравнива от вътрешното усилие

$$N = \sigma_m 2\pi R \delta$$



Фиг.15.4



Като се приравним двете сили, се получава:

$$\sigma_m 2\pi R \delta = p \cdot \pi R^2, \text{ следва че } \sigma_m = \frac{p\pi R^2}{2\pi R \delta} = \frac{pR}{2\delta} = \frac{pD}{4\delta}$$

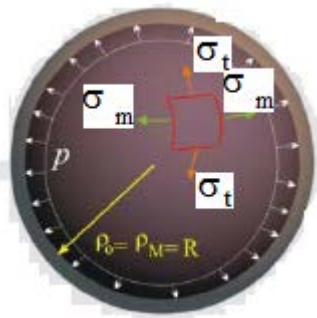
Напреженията в окръжно направление са два пъти по-големи от напреженията в меридианно. Поради това при достигане на критичното вътрешно налягане разрушаването на съда се очаква да стане от пукнатина, успоредна от образуващата на цилиндъра, предизвикана от окръжностното напрежение. При оразмеряването на съда дебелината се съобразява с формулата за окръжностното напрежение.

$$\sigma_t = \frac{pD}{2\delta} < [\sigma_{\text{доп}}] \rightarrow \delta = \frac{pD}{2\sigma_{\text{доп}}}$$

За по-ефективно използване на материала, от които е изработен съда, окръжностното направление се усилва с пръстени. Това позволява при оразмеряването на съда, дебелината се определя от формулата за меридианното напрежение.

$$\sigma_m = \frac{pD}{4\delta} < [\sigma_{\text{доп}}] \rightarrow \delta = \frac{pD}{4\sigma_{\text{доп}}}$$

Тънкостенен сферичен съд



При сферичните съдове кривините в меридианното и окръжностното направление са равни: $\rho_m = \rho_t$.

От формулата на Лаплас за главните напрежения се получава: $\sigma_m =$

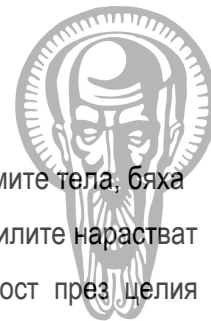
$$\sigma_t = \frac{pD}{4\delta} < [\sigma_{\text{доп}}]$$

Оразмеряването се извършва по формулата: $\delta = \frac{pD}{4\sigma_{\text{доп}}}$.

Фиг.15.5

16. Якост на материалите при променливи напрежения

16.1. Основни понятия



Темите, разглеждани дотук са свързани с механичното поведение на деформируемите тела, бяха разглеждани при предпоставка за статично действие на силите. При тази предпоставка силите нарастват от нула до пълната си стойност за продължително време и остават с тази стойност през целия разглеждан период от време. Редица конструктивни елементи на машините, в процеса на работа изпитват периодично променящи се с времето натоварвания и напрежения. Практиката показва, че механичното поведение на материалите в такъв режим на работа, съществено се отличават от поведението им при статично натоварване. Елементи, подложени на периодично променящи се напрежения, се разрушават при значително по-малки стойности на напрежението, отколкото при статично натоварване. При това, след известен период от време, разрушението настъпва внезапно, без съществена пластична деформация.

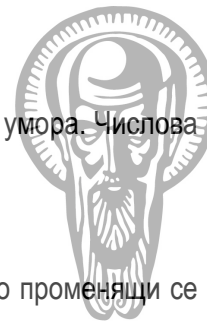
Първоначалните представи са свързали това явление с промяна на структурата и механичните свойства на материала и е било въведено понятието умора на материала. По-късно изследвания показват, че структурата на материала не се променя под действието на циклични напрежения. Механизмът на разрушаване в тези условия се обяснява със съществуването на микродефекти в структурата на материала, с наличието на микропукнатини, които с течение на времето се развиват и водят до разрушаване.



Фиг.16.1. Уморно разрушаване

Под действие на променливи напрежения в материалите се натрупват повреди, развиват се микро и макропукнатини. Конструктивните елементи се разрушават при напрежения, по-ниски от статичната якост на материала.

Явлението на натрупване на промени в материалите вследствие многократната промяна на напреженията, което води до внезапно разрушаване, се нарича умора на материала.



Свойството на материала да се съпротивлява срещу умора, се нарича якост на умора. Числова характеристика на якостта е граница на умора.

Много части от различните машини и съоръжения са подложени на периодично променящи се напрежения. Типичен пример за такива части са валове на различните предавки. На фиг.16.2 е показан вал с кръгово напречно сечение, който е натоварен на огъване от съсредоточена сила P , и на усукване от момента M . Когато т. А от напречното сечение на вала дойде в най-горното си положение, ще изпитва напрежение на натиск, а след половин оборот – ще изпитва напрежение на опън.

Нормалното напрежение за произволно положение на т.А от контура на сечението може да се изчисли по познатата формула, изведена при съпротива на огъване. (16.1)

$$\sigma_A = \frac{My}{J_y} z_A = \frac{My}{J_y} \frac{d}{2} \sin \varphi \quad (16.1)$$

където M е огъващият момент; J_y - инерционен момент спрямо ос; d - диаметър на сечението; φ - ъгъл на радиус-вектора на точка А.

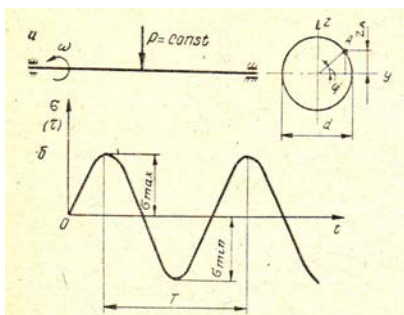
При равномерно движение ъгълът $\varphi = \omega t$, следователно

$$\sigma_A = \frac{My}{J_y} \frac{d}{2} \sin \omega t \quad (16.2)$$

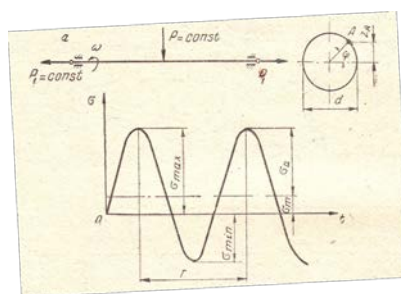
Където ω е ъгловата скорост ($\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$, n - обороти на въртене в минута), а t - време, s .

От (16.2) следва, че нормалното напрежение зависи от времето и се изменя по синусодален закон. Изменението на напрежението в зависимост от времето се представя с (16.3) и графично, както е показано на фиг. 16.2.б. Когато $\varphi = 90^\circ$, напрежението в т.А е $\sigma_A = \sigma_{\max}$, а при $\varphi = 270^\circ$, $\sigma_A = -\sigma_{\max}$.

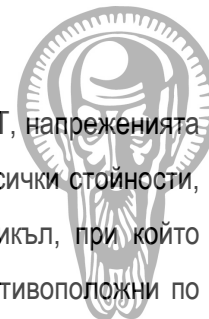
$$\sigma_A = \frac{My}{J_y} \frac{d}{2} \sin \omega t = \sigma_{\max} \sin \omega t \quad (16.3)$$



Фиг.16.1



Фиг.16.2



Напреженията се променят периодично, т.е. през определен период от време T , напреженията приемат редица стойности и се връщат пак в изходната си стойност. Съвкупност от всички стойности, които приема напрежението за един период се нарича цикъл на напрежението. Цикъл, при който максималното и минималното напрежение са еднакви по абсолютна стойност и противоположни по знак, се нарича симетричен, а във всички останали случаи цикълът се нарича асиметричен.

Ако същият вал, показан на фиг.16.2. се натовари с осова сила P_1 , която създава постоянно нормално напрежение (фиг.16.3)

$$\sigma_{\text{он}} = \frac{P_1}{F}, \quad (16.4)$$

което не зависи от полжението на т.А от контура на напречното сечение на вала, то общото напрежение в нея ще бъде

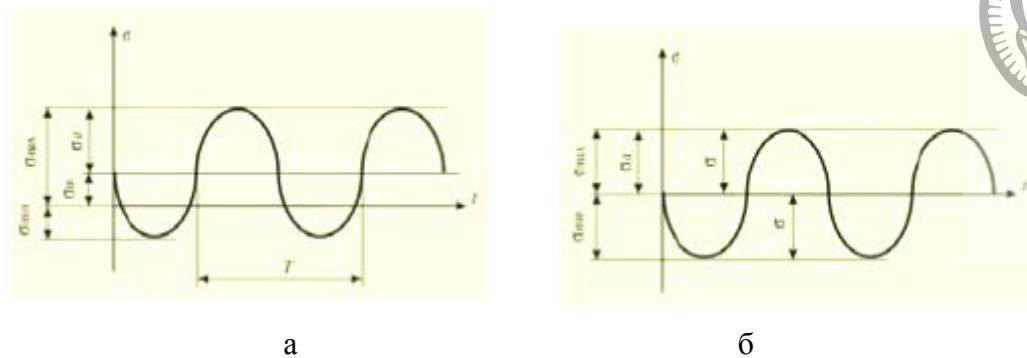
$$\sigma_A = \sigma_{\text{он}} + \sigma_{\text{ор}} = \frac{P_1}{F} + \frac{My}{J_y} \frac{d}{2} \sin \omega t \quad (16.5)$$

Графиката ще бъде синусоида, но вече изместена нагоре спрямо оста Ot на разстояние $\sigma_{\text{он}} = \frac{P_1}{F}$. Ако силата P_1 създава напрежение на натиск, графиката ще бъде изместена надолу спрямо оста Ot .

16.2. Характеристики на цикъла

Съвкупност от всички стойности, които приема напрежението за един период се нарича цикъл на напрежението.

- Максимално напрежение σ_{max}
- Минимално напрежение σ_{min}
- Средно напрежение $\sigma_m = \frac{\sigma_{\text{max}} + \sigma_{\text{min}}}{2}$
- Амплитуда на цикъла $\sigma_a = \frac{\sigma_{\text{max}} - \sigma_{\text{min}}}{2}$
- Коефициент на асиметрия на цикъла се нарича отношението на минималното напрежение към максималното, т.е. $r = \frac{\sigma_{\text{min}}}{\sigma_{\text{max}}}$



Фиг.16.4

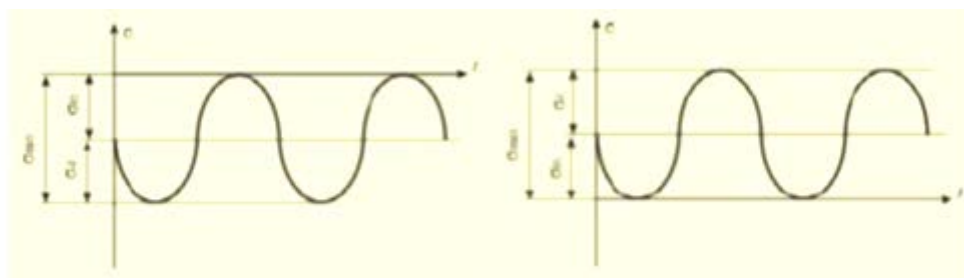
Ако напреженията σ_{\max} и σ_{\min} не са равни по абсолютна стойност и са различни от нула, цикълът се нарича асиметричен. Асиметричните цикли могат да бъдат знакопроменливи и знакопостоянни (ако кривата на напреженията е изцяло над, или изцяло под нулевата линия).

При симетричен цикъл (фиг. 16.4б) $\sigma_{\max} = \sigma$ и $\sigma_{\min} = -\sigma$, $\sigma_m = 0$; $\sigma_a = \sigma_{\max} = \sigma$; $r = -1$

Асиметричен цикъл (фиг. 16.4а)

Пулсиращ цикъл (фиг. 16.5)

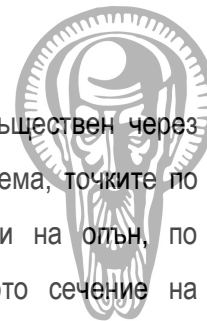
Когато σ_{\max} или σ_{\min} са равни на нула, цикълът се нарича пулсиращ (фиг.16.4). За пулсиращия цикъл $\sigma_a = \sigma_m$; $r=0$ (фиг.16.5а) или $r = \infty$ (фиг.16.5б)



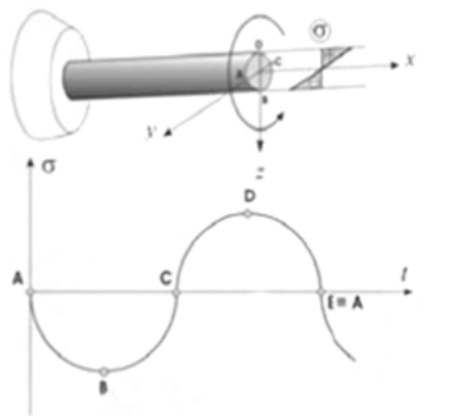
Фиг.16.5

16.3. Граница на умора. Криви на Вьолер

За провеждане на якостни пресмятания (оразмерителни и проверовъчни) на детайли, подложени на периодично натоварване е необходимо да се познават механичните характеристики на материалите в условия на променливи напрежения. Те се определят при специални изпитания на умора. Най-прости за изпълнение и най-широко разпространени са изпитанията при симетричен цикъл на натоварване.



На фиг. 16.6 е представена схема на изпитание при симетричен цикъл, осъществен чрез огъване на въртящ се образец. При тази схема, точките по горната страна на образца са подложени на опън, по долната страна – на натиск, а в средното сечение на образца напреженията са нула.



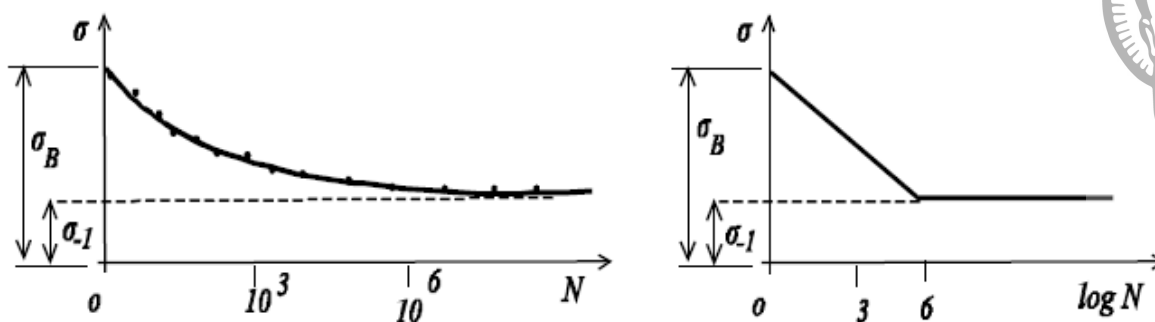
Фиг.16.6.

При завъртане на образца, една точка от средното сечение (например т.А) ще се премести в положение В и ще попадне в натиснатата област (с отрицателни напрежения). При продължаване на въртенето, точката ще попадне в положение С и напреженията отнова ще станат нула. По-нататък точката ще навлезе в опънатата зона на образца и в т.Д ще получи максимални положителни напрежения. Така

при едно завъртане на образца ще се формира един симетричен цикъл на натоварване.

Опитите се провеждат в следната последователност: Избират се 6 - 8 еднакви образци, обикновено с диаметър от 6мм до 10мм и полирана повърхност. Първият образец се закрепя в машината, а с подходящ брой тежести в него се създава максимално напрежение σ_1 (1- първи образец), по-малко от разрушаващото напрежение при статично натоварване σ_B , но близко до него. При пускане на машината, образецът се разрушава след сравнително малко на брой цикли N_1 . Намалява се натоварването и вторият образец да се формира напрежение σ_2 , по-малко от σ_1 . Този образец се разрушава при по-голям брой на циклите N_2 . След като се изпитат всички образци и експерименталните точки се съединят с гладка линия, получава се диаграма, която се нарича крива на умора или крива на Вьолер.

Характерно за кривата на Вьолер е, че за повечето материали тя притежава асимптота, успоредна на оста x . Тази асимптота определя максималното напрежение, което материалът издържа неограничен брой цикли при определен коефициент на асиметрия r . Това напрежение се нарича граница на умора на материала. Означава се σ_r , където r е коефициентът на асиметрия на цикъла. Тъй като кривата на фиг. 16.7 е получена при симетричен цикъл на натоварване, то получената граница на умора се означава като σ_{-1} . При цветните метали се въвежда понятието условна граница на якостна умора. За условна граница на умора се приема напрежението, при което образецът издържа 10^8 цикли.



Фиг.16.7.

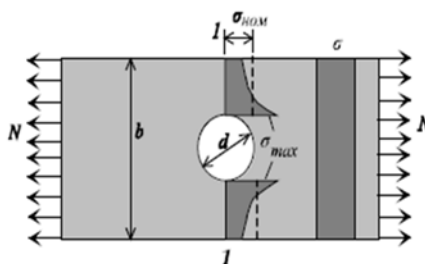
Поради това, че изпитването на умора е продължително, са направени редица експерименти с цел намиране на емпирични зависимости между границата на умора при симетричен цикъл σ_{-1} и кратковременната якост на материала σ_B . Например за въглеродна стомана $\sigma_{-1} = (0,40 \div 0,45) \sigma_B$; за чугун $\sigma_{-1} = 0,40 \sigma_B$; за цветни метали $\sigma_{-1} = (0,24 \div 0,50) \sigma_B$.

16.4. Фактори, които влияят върху границата на умора

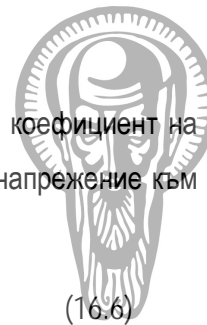
Границата на умора на конструктивните елементи, които се намират в реални условия на експлоатация, зависи не само от свойствата на материала, а и от формата, размерите, начина на изработване и условията на работа на елемента.

Влияние на концентрацията на напрежението

В областта на резките промени на формата на телата, отвори, остри ъгли и изтънявания се наблюдава силно увеличаване на напреженията (концентрация на напреженията), а самите причинители – концентратори на напреженията.



Фиг.16.8



За отчитане на локалното увеличаване на напреженията се въвежда т.н. теоретичен коефициент на концентрация на напреженията, който се определя като отношение на максималното напрежение към номиналното напрежение α_σ

$$\alpha_\sigma = \frac{\max \sigma}{\sigma_{\text{НОМ}}} \quad (16.6)$$

Действителните максимални напрежения са по-малки от тези, пределиени по 16.6 поради несъвършенствата на реалните материали. Поради това за критерий за определяне влиянието на концентрацията на напреженията върху границата на умора на материалите се приема така нар. ефективен коефициент на концентрация:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1к}} > 1 \quad (16.7)$$

Където σ_{-1} е граница на умора на лабораторен полиран образец при симетричен цикъл; $\sigma_{-1к}$ е границата на умора на образец със същите размери, но с концентратор на напрежения. Ефективният коефициент на концентрация се определя експериментално.

Влияние на абсолютните размери

Увеличаването на абсолютните размери на конструктивните елементи води до понижаване на границата на умора. Това явление се обяснява от факта, че колкото по-голям е обемът на материала, толкова по-голяма е вероятността за наличие на структурни нееднородности и дефекти. Намалването на границата на умора с увеличаване на размерите на елементите се оценява с мащабен коефициент:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_{-1}} < 1 \quad (16.8)$$

Където σ_{-1D} е граница на умора на големия детайл, а σ_{-1} е границата на умора на лабораторен образец. Мащабният коефициент се определя експериментално.

Влияние на качеството на повърхнината

Състоянието на повърхността на детайлите оказва влияние върху границата на умора. Повърхностните дефекти играят роля на концентратори на напреженията и могат да предизвикат значително намаляване на границата на умора.

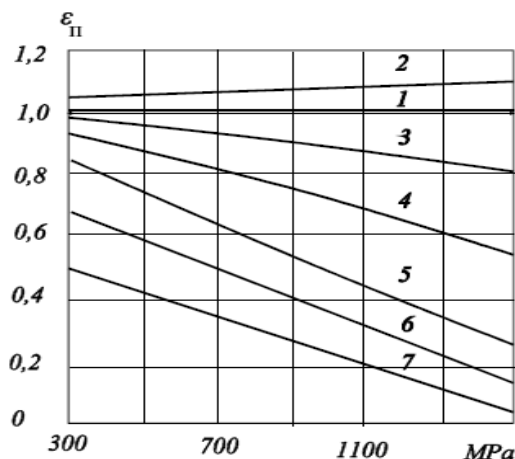
Влиянието на качеството на повърхнината се отчита чрез коефициента β_σ :



$$\beta_{\sigma} = \frac{\sigma_{-III}}{\sigma_{-I}} < 1$$

(16.9)

Където σ_{-III} е граница на умора на реален детайл, а σ_{-I} е граница на умора на полиран лабораторен образец.



Фиг. 16.9

На фиг.16.9 са показани стойностите на коефициента β_{σ} в зависимост от вида на обработка на повърхнината. Кривите съответстват на следните видове обработка: 1 – шлифована епруветка (стандартна); 2 - тяло с полирана повърхност; 3 - повърхност,обработена с резец; 4 - повърхност със ситни нарези; 5 – необработена повърхност; 6 – кородирала повърхност в прясна вода; 7 – кородирала повърхност в морска вода.

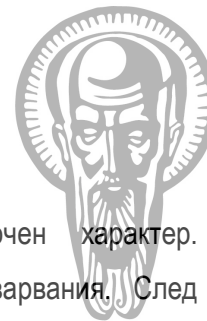
Влиянието на концентрацията на напреженията, на абсолютните размери и качеството на повърхнината върху издържливостта на умора на конструктивните елементи могат да се отчетат едновременно чрез обобщен коефициент:

$$(k_{\sigma})_D = \frac{k_{\sigma,k}}{\varepsilon_{\sigma} \beta_{\sigma}} \quad (16.10)$$

По този начин границата на умора на действителната машинна част при симетричен цикъл е свързана с тази на лабораторен образец с диаметър $d = 10 \text{ mm}$ и гладко полирана повърхнина с отношението:

$$\sigma_{-I,D} = \frac{\sigma_{-I}}{(k_{\sigma})_D} \quad (16.11)$$

В случай на променливи тангенциални напрежения остават в сила всички изрази за съответните коефициенти, като индексът за нормални напрежения се заменя с индекс за тангенциални напрежения.



16.5. Якостни пресмятания при променливи напрежения

Якостните пресмятания при променливи напрежения имат проверочен характер. Разглежданият конструктивен елемент се оразмерява като при статични натоварвания. След определяне на застрашеното сечение се определя коефициент на сигурност срещу умора n и се сравнява с допустимия, който е предписан по задание $[n]$.

Коефициентът на сигурност срещу умора на материала при симетричен цикъл се характеризира с отношението на действителната граница на умора на елемента към максималното напрежение на цикъла

$$\sigma_{-1D} = \frac{\sigma_{-1}}{n_{\sigma}} \quad (16.12)$$
$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1D}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{-1}}{(K_{\sigma})_D \sigma_{\max}} \geq [n_{\sigma}]$$

Аналогично се определя коефициент на сигурност срещу умора при усукване:

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1D}}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_{-1}}{(K_{\tau})_D \tau_{\max}} \geq [n_{\tau}] \quad (16.13)$$

17. Основи на теорията на разрушението

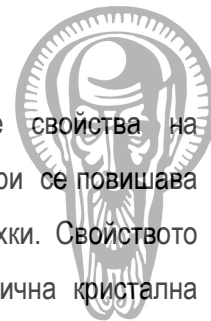
17.1. Поведение на материалите при ниски температури

Конструкционните материали работят в условията на ниски температури при:

- Експлоатация в географски области, където температурите достигат ниски стойности;
- Магистрални тръбопроводи за транспортиране на съгъстени газове
- Хладилни агрегати и инсталации
- Инсталации за получаване на течни газове и резервоари
- Космическа техника

Към материалите, работещи при ниски температури, се предявяват две основни изисквания:

- Да имат достатъчно висока якост
- Да имат достатъчно висока пластичност, така че да се избегне процесът на крехко разрушаване.



Ниските температури оказват съществено влияние върху механичните свойства на материалите. При стайна температура те са жилаво-пластични, а при ниски температури се повишава границата на разрушаване σ_B и се намалява пластичността им, т.е. стават крехки. Свойството „студена крехкост“ е характерно за металите, които имат обемно центрирана кубична кристална решетка (черни метали, вкл. стомани и цинкови сплави). Металите, които имат стенно центрирана кристална решетка (мед, алуминий, никел, сребро, злато и др.) не стават крехки дори при ниски температури. При температура $T = -196^\circ\text{C}$, при която се втечнява азотът, алуминият увеличава якостта 2 пъти, а разтегливостта 4 пъти. Много сплави на алуминия, медта не притежават свойството студена крехкост.

При ниски температури в конструкционните елементи може да се развие крехко разрушаване при напрежения, по-ниски от границата на еластичност на материалите, определена чрез стандартни пробни тела и ниска температура. Това налага въвеждането на друга характеристика за оценка на якостта им при ниски температури.

За работа в условията на ниски температури са подходящи неръждаеми стомани с високо съдържание на хром и никел.

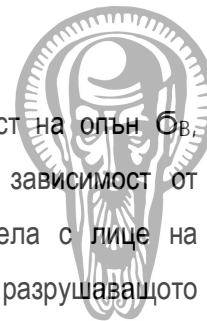
17.2. Крехко разрушаване

С понижаване на температурата разрушаването на жилаво-пластичните материали приема вид на крехко разрушаване. Крехкото разрушаване може да настъпи при напрежения, по-ниски от границата на провлачване σ_S . Това изисква да се познават условията, при които жилаво-пластичните материали се разрушават крехко.

При крехко разрушаване повърхнината на разрушаване има дребнозърнеста, а при пластично-влакнестата структура. Приема се, че при прехода от един вид към друг съществува равенство на повърхнини с влакнестата и дребнозърнестата структура.

Върху якостните свойства на конструкционните елементи при ниски температури съществено влияние оказват концентраторите на напрежения. От една страна в локални области те предизвикват нарастване на напреженията, а от друга- променят вида на напрегнатото състояние, което довежда до активизиране на механизмите на разрушаване.

Технологията на изработване на конструкциите определя наличието на пукнатини в тях, например в заваръчните шевове, при коване, щанцоване и др. При върховете на пукнатините има сложно напрегнато състояние, в резултат на което може да се развие крехко разрушаване дори и в пластични материали с бързо разпространяваща се пукнатина.



На фиг.17.1а. е показано изменението на механичните характеристики якост на опън σ_B , граница на провлачване σ_S , пластичност δ за нисковъглеродна стомана 20 в зависимост от температурата. Резултатите са определени при използване на плоски пробни тела с лице на напречното сечение $F=10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. На същата фигура е показано изменението на разрушаващото напрежение σ_k за образци от същата стомана с предварително създаден концентратор на напрежение във вид на пукнатина. След разрушаването на образците с концентратор е определена площта с влакнеста структура F_B в проценти от общата площ на разрушаване.

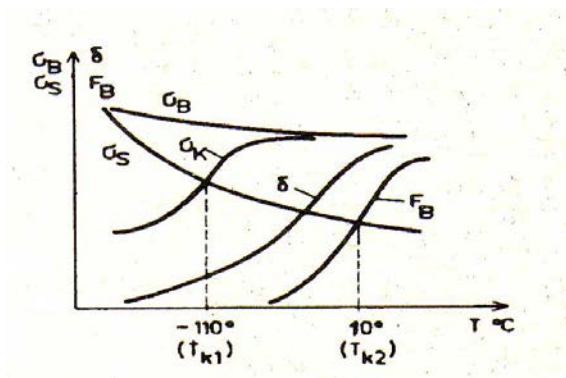
С намаляване на температурата намалява пластичността. Температурата, при която F_B приема стойност 50%, се нарича първа критична температура T_{K1} . Тя характеризира прехода от пластично към крехко разрушаване.

По-нататъшното понижаване на температурата предизвиква нарастване на якостните характеристики якост на опън σ_B , граница на провлачване σ_S , а пластичността и разрушаващото напрежение σ_k продължават да намаляват. Температурата, при която се изравняват σ_k и σ_S , се нарича втора критична температура T_{K2} .

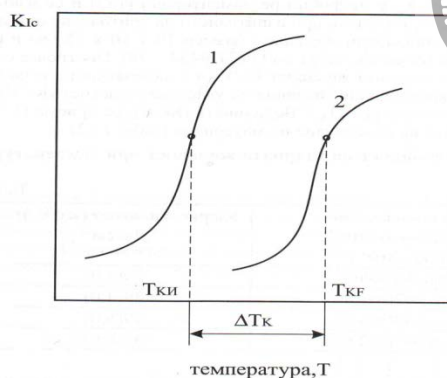
За крехки материали с ниска пластичност опасното състояние на материалите се отнася за температури, по-ниски от първата критична температура T_{K1} , а при жилаво-пластични материали – при температури, по-ниски от T_{K2} .

При нарастване на площта на сечението на конструкционните елементи с 3 порядъка спрямо площта на напречното сечение на стандартните пробни тела критичните температури се повишават със 100-120 °C. Това означава, че нисковъглеродни стомани критичните температури стават положителни. При високоякостните стомани (високолегирани, закалени легирани, високовъглеродни стомани) те са близки до положителните дори при образци с напречни речения, съизмерими с тези на стандартните пробни тела.

Експлоатацията на материалите също влияе върху промяната на критичните температури на крехкост. Под въздействието на радиационно облъчване металите и техните сплави променят якостните си характеристики и увеличават крехкостта си. Това явление е известно като “радиационно окрехкостяване”. Експериментално е установено, че радиационната крехкост се предизвиква от неутронния флуенс, като с нарастване на флуенса се повишава и температурата, при която настъпва радиационна крехкост [12,13]. Температурата на крехко-жилавото разрушение е чувствителна към съдържанието на примесни елементи и дефекти в твърдия разтвор, както и към вида и морфологията на отделните фази в обема и границите на зърната. Влияние оказва химичния състав на стоманата и вида на термичната обработка. На фиг.17.1 б е показано влиянието на неутронното облъчване (крива 2) върху T_{K1} (T_{KF}) на материала на ядрен реактор.



Фиг.17.1а.



Фиг.17.1б.

17.3. Определяне на разрушаващото напрежение

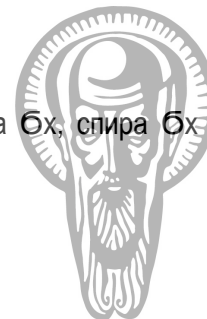
Разрушаващото напрежение σ_k съществено зависи от изходната дължина на пукнатината, която се развива до разрушаването на конструкционните елементи. За инженерната практика интерес представлява да се установи връзка между критичното напрежение и дължината на пукнатината.

Решение на тази задача е предложено от Грифитс (1893-1963), основоположник на теорията за разпространение на пукнатини в крехки материали и разрушението. През 1920 г. Грифит публикува резултатите от експерименталните изследвания за якостта на тънки стъклени нишки с дебелина 2-3 микрона, чрез които той дава отговор на въпроса защо реалната якост на материалите е много по-малка от теоретичната якост, получена чрез изчисление на силите на сцепление между атомите. Причината за това той намира в наличието на микропукнатини в материалите.

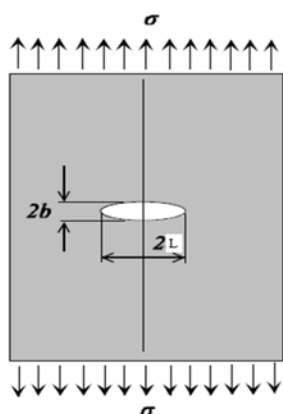
Ако за стъклени нишки с дебелина над 0.1 mm якостта на опън е около 70-140 MPa, за нишки с дебелина 2-3 микрона якостта им се увеличава до 11300 MPa (80 пъти), която е близко до теоретичната якост от 14000 MPa. При тънките влакна възможността за поява на пукнатини е минимална, от където Грифит прави извода, че главната причина за намаляване якостта на крехките материали е наличието на пукнатини в тях.

17.3.1. Теория на Грифитс. Енергетичен подход

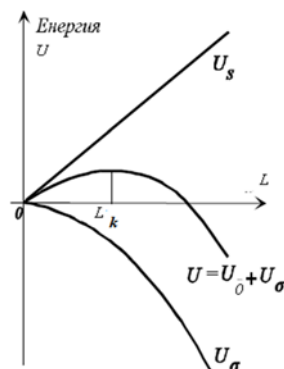
Грифитс разглежда пластина с широчина $2B$ със симетрично разположена пукнатина с дължина $2L$. Пластината е подложена на центричен опън, в резултат на което в напречните и сечения възникват равномерно разпределени напрежения σ_x (фиг.17.2). При увеличаване на σ_x над определена



стойност пукнатината започва устойчиво да нараства, т.е. ако спре нарастването на σ , спира σ нарастването на пукнатината.



Фиг.17.2



фиг.17.3

Приема се, че нарастването на пукнатината се извършва за сметка на освобождаващата се в околността и еластична енергия. Освободената се енергия се изразходва за увеличаване на двете свободни повърхнини на пукнатината.

Грифитс представя общата енергия като сума от енергията за разделяне на две нови повърхности на пукнатина U_0 и енергията U_σ , която се освобождава при появата на пукнатина (фиг.17.3).

$$U(l) = U_0 + U_\sigma \quad (17.1)$$

Еластичната енергия за единица дължина е :

$$U_\sigma = -\frac{\pi \cdot 2L^2 \cdot \sigma^2}{2E} = -\frac{\pi \cdot L^2 \cdot \sigma^2}{E} \quad (17.2)$$

Знакът „-“ показва, че енергията се освобождава при увеличаване на L .

Енергията за образуване на двете повърхнини за единица дължина на пукнатината е:

$$U_0 \approx 4 \cdot L \cdot \gamma \quad (17.3)$$

Където γ е относителната повърхностна енергия на материала.



(17.4)

За общата енергия може да се запише зависимост (17.4)

$$U(l) = 4 \cdot l \cdot \gamma - \frac{\pi \cdot l^2 \cdot \sigma_k^2}{E}$$

Според Грифитс пукнатината се разпространява, когато има равенство на скоростите на изменение на енергиите U_o и U_σ .

$$\left| \frac{dU_\sigma}{dL} \right| = \frac{dU_o}{dL} \quad (17.5)$$

Това условие е равностойно на условието за екстремум на общата енергия U , която се получава при напрежение $\sigma_k = \sigma_{k0}$, т.е.

$$\frac{dU}{dL} = 0 \quad (17.6)$$

След диференциране на (17.4) се намира:

$$4\gamma E = 2L\pi\sigma_k^2 \quad (17.7)$$

Откъдето

$$\pi L\sigma_k^2 = 2\gamma E$$

След коренуване на двете страни на равенството се получава:

$$\sigma_k \sqrt{\pi L} = \sqrt{2\gamma E} \quad (17.8)$$

За даден материал и определено разположение на пукнатината γ и модулът на еластичност E са константи. Зависимост (17.8) може да се запише

$$K_I = \sigma_k \sqrt{\pi L} = \sqrt{2\gamma E} = const \quad (17.9)$$

където K_I е коефициент на интензивност на напреженията, Pa.m^{1/2}



(17.10)

Критичната стойност на пукнатината L_k се определя

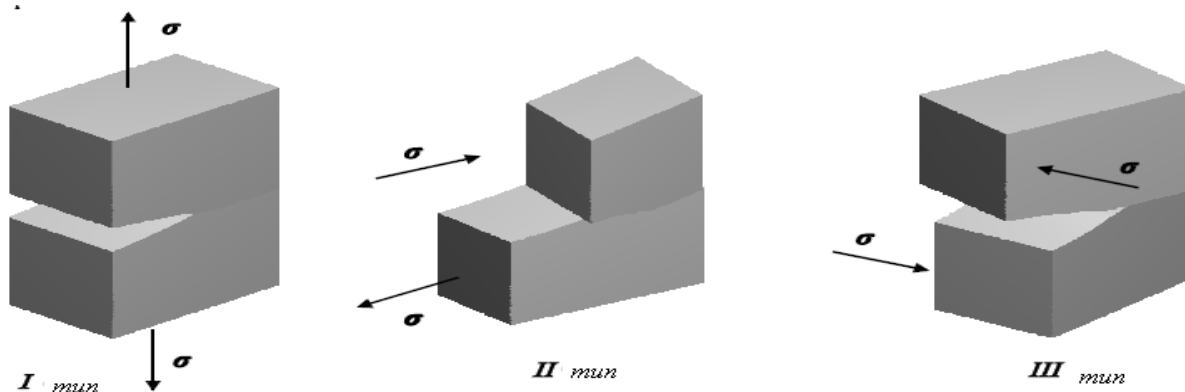
$$L_k = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma_k^2}$$

При дължини, по-големи от критичната дължина ($L > L_k$) нарастването на пукнатината е самопроизволно и с голяма скорост, тъй като е енергетично оправдано и е свързано с намаляване на енергията на образца.

При голямо напрежение критичната дължина L_k намалява значително и причинява крехко разрушаване при наличие и на много малки пукнатини.

Експерименталните изследвания показват, че коефициентът на интензивност на напреженията зависи от размерите на конструкционните елементи, вида на натоварването и формата и разположението на пукнатината. Зависимост (17.9) се отнася за пукнатина, в чийто връх разрушаването е вследствие на разкъсване на материала под действие на нормалните напрежения. Този вид пукнатина се отбелязва като пукнатина от I тип (фиг. 17.3). Във върха на пукнатината се образува зона с полуразрушен материал, която се нарича фронт на пукнатината.

Външното натоварване може да създава тангенциални напрежения и разрушаването е вследствие на срязване на материала. При тангенциалните напрежения, които са перпендикулярни на фронта на пукнатината, се приема, че пукнатината е от II тип, а когато тангенциалните напрежения са успоредни на фронта- пукнатината е от III тип.



Фиг. 17.4

В механиката на разрушението се поставят две задачи:

1. При дадено напрежение да се намери критичната стойност на пукнатината.

$$L_k = \frac{2\gamma E}{\pi\sigma^2}$$



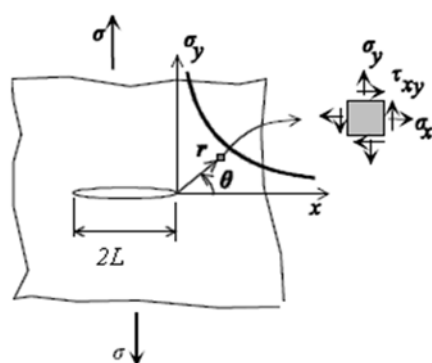
2. При известна дължина на пукнатината да се определи големината на напрежението, при което тя ще продължи да се разпространява.

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi L}}$$

$$= \frac{K_I}{\sqrt{\pi L}}$$

(17.11)

17.3.2. Теория на Ирвин



Фиг.17.5

Теорията на Грифит предполага, че материалът е линейно еластичен при опън до разрушението си, каквито са крехките материали. При пластичните материали теорията за разпространението на пукнатините е развит от Ирвин (1948). При разглеждане на областта около пукнатина (I тип) в пластина с неограничени размери (фиг. 17.5), Ирвин е получил изразите за напреженията при върха на пукнатината (17. 12).

Напрегнатото състояние в двумерно, а деформационното състояние е тримерно. Задачата за определяне на напреженията в околността на върха на пукнатината се решава чрез методите на теория на еластичността.

Тук са приведени крайните резултати:

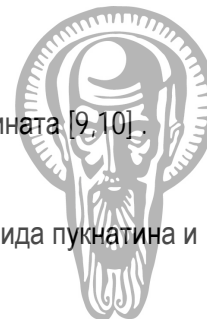
$$\sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_y = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (17.12)$$

$$\tau_{xy} = \sigma_x = \frac{K_I}{(2\pi r)^{1/2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

където: r – разстояние от върха на пукнатината до разглежданата точка; θ - ъгъл между радиус вектора r и ос x на пукнатината; K_I е коефициент на интензивност на напреженията, който се определя чрез израза:

$$K_I = Y \cdot \sigma_k \sqrt{\pi L} \quad (17.13)$$



Където Y е безразмерен коефициент, зависещ от геометрията на пластината и пукнатината [9,10].

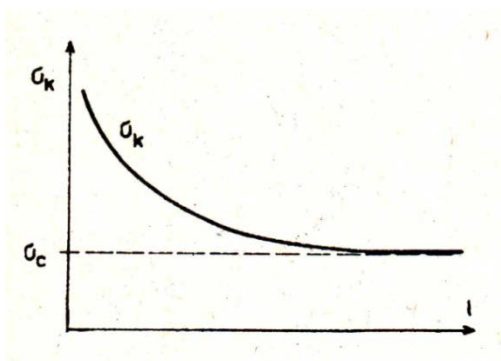
Коефициентът на интензивност на напреженията се определя в зависимост от вида пукнатина и формата на конструктивния елемент.

Методите за определяне на K са приблизителни и според тях Y е между 1 -1,4. За изчисляване на коефициента се използва метод на крайните елементи [8,9].

17.3.3. Критична стойност на коефициент на интензивност на напреженията

Както беше показано, напрежението на разрушаване зависи от началната дължина на пукнатината (фиг.17.6). Съществува критична стойност на L , за която σ_k приема най-ниска стойност σ_c за даден материал, форма и разположение на пукнатината. Съгласно (17.9) и (17.13) на σ_c съответства критична стойност на K_{Ic} :

$$K_{Ic} = Y\sigma_c\sqrt{\pi L_k} \quad (17.14)$$



Фиг. 17.6

Създадени са методики за експериментално определяне на K_{Ic} , по които стойности може да се оцени чрез сравнение годността на материала за приложение в определен случай на конструиране на ново изделие. При известен материал, форма и размери и известно разположение на пукнатината, може да се изчисли K_I и да се сравни с K_{Ic} . Разглежданата конструкция е годна за експлоатация, ако изчисленият коефициент на интензивност на напрежение K_I е по-малък от критичния коефициент на напрежения K_{Ic} . В табл. 17.1 са посочени експериментално определени стойности на K_{Ic} за различни материали.



Таблица 2

Материал	$K_c, \text{Мпа}\cdot\text{м}^{1/2}$
Стомана	11,06
Чугун	3,16
Дуралуминий	11,06
Дървесина	0,85

За полубезкрайна пластина със странична пукнатина, критичният коефициент на напрежения се определя:

$$K_{Ic} \approx 1.12\sigma\sqrt{\pi L} \quad (17.15)$$

Твърдо тяло с дискообразна пукнатина:

$$K_{Ic} \approx \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\pi L} \quad (17.16)$$

$K_{Ic} \approx \sigma\sqrt{\pi L}Y\left(\frac{L}{b}\right)$, където $Y\left(\frac{L}{b}\right)$ е тарировъчна функция за различни тела и пукнатини [9-11].



Използвана литература

1. Попова М, Д .Панчовски, Приложна механика, Техника, С.,1993.
2. Спасов Б., Техническа механика, Част I, С.,1982.
3. Кисьов И., Съпротивление на материалите, С.Техника,1978.
4. Лазов Л., И. Славов, Съпротивление на материалите, С.Техника,1992.
5. Иванов И., Механика на материали, Лекции, Русенски Университет, 2009.
6. Илиев В. Техническа механика, Лекции, ХТМУ, С.,2007.
7. Милков В., Съпротивление на материалите, ТУ-Варна, 2007.
8. Beer F. et all, Mechanics of materials, 6th ed. McGraw-Hill, 2012
9. Иванов И., Якост на материалите, Лекционни записки, Русенски Университет, 2011.
10. Господинов Г., Въведение в изчислителната механика на разрушението, лекции, София, УАСГ, 1997.
11. Желев А., И.Коларов, Заварени конструкции,т.2.С. Техника 1984.
12. Ivanova Y., T.Partalin, Pashkuleva D., Acoustic investigations of the steel deformation during the tensile, Russian Journal of Nondestructive Testing, том:53, брой:1, 2017, стр.:39-50.
13. Авджиева Т., К. Стаевски, Материалознание и технология на материалите, СУ“Св.Климент Охридски“, С. 2013.
14. Лаков М., Ст. Воденичаров, Пейчев Д., Влияние на процесите на стареене върху остатъчния ресурс на съоръжения от АЕЦ, https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/35/047/35047075.pdf.
15. Лаков М. Оценка на радиационното въздействие върху метала на корпуса на реактора на ВВЕР-440, Научна конференция ЕМФ'2001, 163-168
https://inis.iaea.org/collection/NCLCollectionStore/_Public/46/101/46101997.pdf